

Corrigé de l'examen final de MT2A-MT2B-MT2D

Exercice 1

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall P \in E, \varphi(P) = \alpha P + (X+1)P'$

1. Soit $P \in E$.

□ *Première méthode* : il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$
 Alors $\varphi(P) = \alpha P + (X+1)P' = \alpha(aX^2 + bX + c) + (X+1)(2aX + b)$
 $= (2a + \alpha a)X^2 + (2a + b + \alpha b)X + (b + \alpha c)$ est de degré au plus 2.
 Donc $\varphi(P) \in E$.

□ *Deuxième méthode* : on utilise les propriétés du degré des polynômes.
 Si P est constant alors $\varphi(P) = \alpha P$ est constant donc appartient à E .
 Supposons P non constant. Alors $1 \leq \deg(P) \leq 2$.

$$\text{De plus } \deg(\alpha P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \deg((X+1)P') = \deg(X+1) + \deg(P') = 1 + (\deg(P) - 1) = \deg(P).$$

$$\text{Donc } \deg(\alpha P + (X+1)P') \leq \max\{\deg(\alpha P), \deg((X+1)P')\} \leq \deg(P).$$

$$\text{Ainsi : } \deg(\varphi(P)) \leq 2 \quad \text{i.e.} \quad \varphi(P) \in E.$$

2. Soient T et R deux polynômes appartenant à E . Soit λ un nombre réel.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot T + R) &= \alpha(\lambda \cdot T + R) + (X+1)(\lambda \cdot T + R)' \\ &= (\alpha\lambda) \cdot T + \alpha \cdot R + (X+1)(\lambda \cdot T' + R') \\ &= \lambda(\alpha T) + \alpha R + \lambda(X+1)T' + (X+1)R' \\ &= \lambda(\alpha T + (X+1)T') + (\alpha R + (X+1)R') \\ &= \lambda \cdot \varphi(T) + \varphi(R) \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

3. (a) □ *Première méthode* : montrons que la famille $\mathcal{C} = (1, X+1, (X+1)^2)$ est libre.

Soient a, b et c trois réels tels que $a1 + b(X+1) + c(X+1)^2 = 0$

Alors $a + bX + b + c(X^2 + 2X + 1) = 0$ d'où $(a+b+c) + (b+2c)X + cX^2 = 0$

$$\text{Donc par identification des coefficients} \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = -b-c = 0 \\ b = -2c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\mathcal{C}$ est libre. De plus elle comporte 3 vecteurs et $\dim(E) = 3$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est une base de E .

□ *Deuxième méthode* : calculons le rang de la famille $\mathcal{C} = (1, X+1, (X+1)^2)$.
 Sachant que $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = 1X^0 + 2X^1 + 1X^2$ nous avons :

$$\text{rg}(1, X+1, (X+1)^2) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Or } \text{rg}(1, X+1, (X+1)^2) = \dim(\text{Vect}(1, X+1, (X+1)^2)).$$

Donc $\text{Vect}(1, X+1, (X+1)^2)$ est un sous-espace vectoriel de E , de même dimension que E . Ainsi $E = \text{Vect}(1, X+1, (X+1)^2)$ et $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de E , comportant 3 vecteurs avec $\dim(E) = 3$.

Finalement $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } E}$.

- (b) Calculons les images par φ des vecteurs de la base $\mathcal{C}$.

$$\varphi(1) = \alpha 1 + (X+1)0 = \alpha 1 \quad ; \quad \varphi(X+1) = \alpha(X+1) + (X+1) = (\alpha+1)(X+1)$$

et enfin $\varphi((X+1)^2) = \alpha(X+1)^2 + 2(X+1) = (\alpha+2)(X+1)^2$

$$\text{D'où :} \quad D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\alpha, \alpha+1, \alpha+2).$$

4. (a) Calculons les images par φ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

On a déjà vu que $\varphi(1) = \alpha$. De plus $\varphi(X) = \alpha X + (X+1) = 1 + (\alpha+1)X$ et enfin $\varphi(X^2) = \alpha X^2 + 2X(X+1) = 2X + (\alpha+2)X^2$.

$$\text{D'où :} \quad A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Soit Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

La j -ème colonne de Q est la matrice colonne des coordonnées du polynôme $(X+1)^j$ dans la base $(1, X, X^2)$.

$$\text{On obtient donc :} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de bases pour un endomorphisme :

$$\boxed{Q^{-1} A Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = D}.$$

5. Dans cette dernière question uniquement, on suppose que $\alpha = -2$.

- (a) Nous avons d'après la question **3b**, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice

de rang 2. Donc $\boxed{\text{rg}(\varphi) = 2}$.

De plus $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X+1), \varphi((X+1)^2)) = \text{Vect}(-2, -(X+1), 0) = \text{Vect}(1, X+1)$.

Donc $\boxed{\text{le couple } (1, X+1) \text{ est une base de l'image de } \varphi}$.

- (b) D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim(\text{Ker} \varphi) + \text{rg}(\varphi)$

d'où $\dim(\text{Ker} \varphi) = \dim E - \text{rg}(\varphi) = 3 - 2 = 1$

Une base du noyau de φ est donc constituée d'un vecteur non nul appartenant au noyau de φ . Or $\varphi((X+1)^2) = 0$.

Donc $\boxed{((X+1)^2) \text{ une base de } \text{Ker} \varphi}$.

- (c) Nous avons d'une part $\dim(\text{Ker} \varphi) + \dim(\text{Im} \varphi) = \dim E$. D'autre part

$\text{Im}(\varphi) + \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(1, X+1) + \text{Vect}((X+1)^2) = \text{Vect}(1, X+1, (X+1)^2) = E$

Donc $\boxed{E = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi)}$ ce qui revient à dire que les sous-espaces $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 2

Soit f la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

1. Soit $(x, y) \in U$.

$$\square \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + (x + y) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$$

$$\square \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

$$\begin{aligned} \llcorner (x, y) \text{ est un point critique de } f \llcorner &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2} \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ y^2 = x^2 \end{cases} \iff x^2 = y^2 \\ &\iff x = y \text{ ou } x = -y \\ &\iff x = y \quad (\text{car } x > 0 \text{ et } y > 0) \\ &\iff (x, y) = (y, y). \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc les points de la forme (a, a) avec $a > 0$.

2. (a) Soit $(x, y) \in U$.

$$\square \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y(-2)x^{-3} = \frac{2y}{x^3}$$

$$\square \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\square \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x}{y^3}$$

(b) Soit $a > 0$. Introduisons les notations de Monge au point critique (a, a) :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, a) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, a).$$

Alors :

$$r = \frac{2a}{a^3} = \frac{2}{a^2}, \quad s = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{a^2}.$$

Donc

$$rt - s^2 = \left(\frac{2}{a^2} \right)^2 - \left(-\frac{2}{a^2} \right)^2 = 0.$$

Puisque $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien déduire quant à la nature du point critique (a, a) .

3. (a) Par définition de f , on a :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = (x + y) \left(\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} \right) = (x + y) \frac{(y + x)}{xy} = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

(b) Soit $(x, y) \in U$.

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0.$$

Donc $\boxed{(x + y)^2 \geq 4xy}.$

(c) Soit $a > 0$ et soit $(x, y) \in U$.

D'après la question 3(a), on a : $f(a, a) = \frac{(a + a)^2}{aa} = \frac{4a^2}{a^2} = 4.$

De même,

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$$

où $(x + y)^2 \geq 4xy$ d'après 4(b) avec $xy > 0$ puisque $x > 0$ et $y > 0$. Donc :

$$f(x, y) \geq 4.$$

Par conséquent,

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) \geq f(a, a).$$

Ainsi, f admet un minimum global en (a, a) .

Donc $\boxed{f \text{ admet un minimum global sur } U \text{ qui vaut } 4 \text{ et qui est atteint en chacun des points critiques } (a, a) \text{ avec } a > 0}.$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 4 & \text{d'après 3(c)} \\ f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} \frac{2}{n}} = \frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{\frac{2}{n^2}} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 4} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{9}{2}}.$$

(b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, la fonction $\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en } (0, 0)}$.

En effet, si f admettait une limite, notée ℓ , en $(0, 0)$, alors on aurait, pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ qui convergent vers 0, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \ell$, et donc en particulier

$$4 = \ell \text{ et } \frac{9}{2} = \ell; \text{ ce qui est impossible puisque } 4 \neq \frac{9}{2}.$$

Exercice 3

1. On a

$$f(0) = \int_1^3 \frac{\cos(0t)}{t} dt = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \ln(3) - \ln(1) = \boxed{\ln(3)}.$$

2. (a) Soient $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $t \in [1, 3]$. Alors :

$$\begin{aligned} 1 \leq t \leq 3 &\implies x \leq tx \leq 3x \\ &\implies \cos(x) \geq \cos(tx) \geq \cos(3x) \end{aligned}$$

car la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$.

Donc : $\boxed{\forall t \in [1, 3], \quad \cos(3x) \leq \cos(tx) \leq \cos(x)}.$

(b) D'après ce qui précède, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$,

$$\int_1^3 \frac{\cos(3x)}{t} dt \leq \int_1^3 \frac{\cos(tx)}{t} dt \leq \int_1^3 \frac{\cos(x)}{t} dt,$$

i.e.

$$\cos(3x) \int_1^3 \frac{1}{t} dt \leq f(x) \leq \cos(x) \int_1^3 \frac{1}{t} dt.$$

Ainsi :

$$\boxed{\cos(3x) \ln(3) \leq f(x) \leq \cos(x) \ln(3)}.$$

(c) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(3x) \ln(3) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \ln(3) = \ln(3).$$

D'après le théorème des gendarmes et l'encadrement précédent, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(3).$$

En utilisant la question 1, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en } 0}.$

3. Posons $u = xt$ où la fonction $t \mapsto xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 3]$.

□ Bornes :

$$\begin{aligned} t = 1 &\implies u = x \\ t = 3 &\implies u = 3x \end{aligned}$$

□ Élément différentiel :

$$u = xt \implies du = x dt$$

□ Intégrande :

$$\frac{\cos(xt)}{t} = \frac{\cos(u)}{\frac{u}{x}} = \frac{x \cos(u)}{u}$$

Ainsi,

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{x \cos(u)}{u} \frac{du}{x} = \boxed{\int_x^{3x} \frac{\cos(u)}{u} du}.$$

4. Soit G une primitive de la fonction de la fonction $g : u \mapsto \frac{\cos u}{u}$ sur $]0, +\infty[$. On sait que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \int_x^{3x} G'(u) \, du = G(3x) - G(x).$$

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) &= 3G'(3x) - G'(x) \\ &= 3g(3x) - g(x) \\ &= 3 \times \frac{\cos(3x)}{3x} - \frac{\cos(x)}{x} \\ &= \boxed{\frac{\cos(3x) - \cos x}{x}}. \end{aligned}$$

5. (a) Soit x au voisinage de 0. Alors :

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x),$$

où ε tend vers 0 en 0.

- (b) Au voisinage de 0, on a :

$$\square \cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24} + x^5 \varepsilon_1(x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{24}x^4 + x^5 \varepsilon_1(x)$$

$\square$ D'où :

$$\begin{aligned} \boxed{f'(x)} &= \frac{\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{24}x^4 + x^5 \varepsilon_1(x)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)\right)}{x} \\ &= \frac{-4x^2 + \frac{10}{3}x^4 + x^5 \varepsilon_2(x)}{x} \\ &= \boxed{-4x + \frac{10}{3}x^3 + x^4 \varepsilon_2(x)}, \end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions qui ont pour limite 0 en 0.

- (c) En primitivant le développement limité de f' à l'ordre 4 en 0 on obtient celui de f à l'ordre 5 en 0. Ainsi, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \boxed{f(x)} &= f(0) - 4\frac{x^2}{2} + \frac{10}{3}\frac{x^4}{4} + x^5 \varepsilon_3(x) \\ &= \boxed{\ln(3) - 2x^2 + \frac{5}{6}x^4 + x^5 \varepsilon_3(x)}, \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$.