

NOM : _____ Prénom : _____ Groupe : _____



Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Chaque étudiant rendra 3 copies (une copie pour l'exercice 2, une copie pour la partie A de l'exercice 3 et une copie pour la partie B de l'exercice 3) ainsi que la première feuille du sujet pour l'exercice 1.

À rédiger sur une copie à part

Exercice 1 : algèbre linéaire _____ (5 points)

Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}_3[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^3 a_k X^k$ appartenant à E , on définit

le polynôme $s(P)$ par : $s(P) = \sum_{k=0}^3 a_{3-k} X^k$

Autrement dit $s(P)$ est obtenu à partir de P en «inversant l'ordre des coefficients».

1. Donner $s(7X^3 - 2X^2 + 1)$.
2. Montrer que l'application $s : P \mapsto s(P)$ est un endomorphisme de E .
3. Que peut-on dire de $(s \circ s)(P)$? En déduire que s est bijective.
4. Déterminer la matrice A de s dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E .
5. (a) Déterminer une base du noyau de l'endomorphisme $s - \text{id}_E$.
(b) En déduire le rang de $s - \text{id}_E$.
6. (a) Prouver que la famille $\mathcal{C} = (1 + X^3, X + X^2, X^2 - X, X^3 - 1)$ est une base de E .
(b) Écrire la matrice D de s dans cette base $\mathcal{C}$.

Exercice 2 : fonctions de deux variables _____ (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

1. Montrer que les points critiques de f sont les points de la forme (a, a) avec $a > 0$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f .

- (b) Vérifier que les notations de Monge ne permettent pas de déterminer la nature des points critiques.
3. (a) Vérifier que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$
- (b) Démontrer que $(x+y)^2 \geq 4xy$.
- (c) En déduire que f présente sur U un minimum global atteint en chaque point critique et préciser la valeur de ce minimum.
4. **Remarque** : si l'exercice n'est pas assez long, on peut faire calculer

$$f(1/n, 1/n) \quad \text{et} \quad f(1/n, 2/n)$$

puis leur demander la limite éventuelle de f en $(0, 0)$.

Exercice 3 : fonction définie par une intégrale

(8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \int_1^3 \frac{\cos(xu)}{u} du$$

- Calculer $f(0)$.
- Soit $x > 0$. À l'aide du changement de variable $t = xu$, démontrer que

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$$

- Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$
 - Démontrer que :
$$\forall t \in [x, 3x], \quad \cos(3x) \leq \cos t \leq \cos x$$
 - En déduire un encadrement de $f(x)$.
 - Démontrer alors que f est continue en 0.
- À l'aide de la formule trouvée à la question 2, démontrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\cos(3x) - \cos x}{x}$$

- Rappeler le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de zéro de la fonction $x \mapsto \cos x$.
 - En déduire le développement limité d'ordre 4 en zéro de la dérivée f' .
 - Calculer le développement limité d'ordre 5 en zéro de la fonction f .
 - Remarque** : si l'exercice n'est pas assez long on peut demander équation de demi-tangente et position par rapport à la courbe au voisinage de zéro.