Mathématiques - MT12

Tronc commun

Final - Printemps 2012

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice ou d'un téléphone est interdite. Une feuille de notes est autorisée.
Les parties 1 et 2 sont à rédiger sur des copies différentes. La partie 3 est à faire directement sur la feuille.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Partie 1

Exercice 1 (4 Points)

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \in \Omega \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que f admet des dérivées partielles sur Ω et les calculer.
3. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4. Les dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 (4 Points)

1. En utilisant le changement de variables $u = \sqrt{x}$, calculer $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{(x+1).\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.
   (a) En intégrant par parties, trouver, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
   (b) En déduire I_2, I_3 et I_4.
   (c) Montrer que
   $$I_n = \frac{2^{2n}.(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie 2

Veuillez changer de copie.

Exercice 3 (8 Points)

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On donne le polynôme caractéristique de f, $P_f(X) = X - X^3$

1. Montrer que f possède trois valeurs propres distinctes, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
2. (a) Montrer que les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$, et $e_2 = (2,0,1)$ sont des vecteurs propres de f.

   (b) Déterminer le sous-epace propre E_3 associé à la valeur propre λ_3.
3. Soit e_3 un vecteur non nul de E_3. Indiquer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$.
4. On considère un vecteur e_4 de coordonnées (m, n, p) dans la base $\mathcal{B}_1$ avec $m, n, p \in \mathbb{R}^\star$.

   (a) Déterminer les coordonnées de $f(e_4)$ et de $f(f(e_4))$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

   (b) Montrer que $(e_4, f(e_4), f(f(e_4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$
   où a, b, c sont trois constantes réelles.

   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice B.

   (b) La matrice B est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}_2 = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer les valeurs des constantes a, b, c.

   (c) Montrer que $f(u) = v$ et $f(v) = w$.

   (d) Les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}_1$ sont $(1, 1, 1)$.
   Déterminer la matrice de passage, notée Q, de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$.
6. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{B}_1$.
   Montrer, sans calcul, que $PQB = APQ$.

Nom : .... Prénom : .... Groupe de TD : ......

On répondra à cet exercice directement sur la feuille. À détacher, et à rendre avec les autres copies.

On considère l'équation différentielle (E) : $-t^2\,\boldsymbol{z'} + t\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^2$

dans laquelle $\boldsymbol{z}$ désigne la fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^{+*} =]0\,,+\infty[$.

1. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle homogène (H) : $t^2\,\boldsymbol{y'} + t\,\boldsymbol{y} = 0$.

   (b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle (E_0) : $t^2\,\boldsymbol{y'} + t\,\boldsymbol{y} = 1$.

2. On recherche les fonctions solutions de (E) qui ne s'annulent pas sur I.

   (a) On pose $\boldsymbol{z} = \dfrac{1}{\boldsymbol{y}}$. Vérifier que la résolution de (E) se ramène à celle de (E_0).

   (b) Montrer que les solutions sur I de (E) sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \dfrac{t}{\ln(a\,t)}$ où a est une constante réelle strictement positive.