Mathématiques - MT12

Tronc commun

Final - Printemps 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est interdite. Les téléphones doivent être éteints et rangés dans vos sacs. Une feuille de notes manuscrite, format A4 recto-verso, est autorisée.
Les parties 1 et 2 sont à rédiger sur des copies différentes.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Partie 1

Exercice 1 (10 Points)

1. Montrer que, si M désigne une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors la matrice M^2 est aussi diagonalisable.
   On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
   Pour ce faire, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
   On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Calculer $P_A(X)$, le polynôme caractéristique de A. En déduire la valeur propre réelle de l'endomorphisme f.
   (b) En déduire que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Donner un vecteur non nul de $\ker(f - \mathrm{Id})$, que l'on notera u. Préciser la dimension de l'espace propre $\ker(f - \mathrm{Id})$.

3. (a) Calculer A^2.
   (b) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue la matrice-colonne X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire une base (v, w) de $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$ (où f^2 désigne l'endomorphisme $f \circ f$).
   (c) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Écrire la matrice de f^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Partie 2

Veuillez changer de copie.

Exercice 2 (10 Points)

On considère les applications

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = (t + \ln t)\, e^{t-1} \end{array} \right.$$

et

$$F : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Justifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis que pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$, $F'(x) = f(x)$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

On considère l'application g de classe $\mathcal{C}^2$

$$g : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = F(x) + F(y) - 2\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}. \end{array} \right.$$

2. Exprimer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$, pour tout $(x,y) \in\ ]0,+\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f, puis montrer que f est bijective.
   Indication. On admettra, sans démonstration, que pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\ln t + \dfrac{1}{t} > 0$.

   (b) Établir que, pour tout $(x,y) \in\ ]0,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de g si et seulement si :
   $$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = \mathrm{e}.$$
4. Montrer que l'équation $x + \ln x = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in\ ]0,+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α. Vérifier que $1 < \alpha < \mathrm{e}$.
5. Montrer que g admet un extremum local. Préciser sa nature.

Corrigé

Exercice 1

1. Si M est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice inversible P, et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Mais alors, $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$ est aussi diagonalisable (car D^2 est diagonale).

2. (a) On calcule

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 2 & -5-X & 4 \\ 3 & -8 & 6-X \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 + C_1 + C_2 \\
&= \begin{vmatrix} -X & 2 & 1-X \\ 2 & -5-X & 1-X \\ 3 & -8 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ 2 & -5-X & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ 2+X & -7-X & 0 \\ 3+X & -10 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\left[-10(2+X) + (3+X)(7+X)\right] \\
&= (1-X)(X^2+1)
\end{aligned}$$

Donc ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, et sa seule valeur propre est 1.

(b) Le polynôme caractéristique n'étant pas scindé sur $\mathbb{R}$, A n'est pas diagonalisable.

(c) $(x, y, z) \in \ker(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -x + 2y - z = 0 & \\ 2x - 6y + 4z = 0 & L_2 + 2L_1 \\ 3x - 8y + 5z = 0 & L_3 + 3L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$

Donc $\ker(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$.
En posant $u = (1, 1, 1)$ la famille (u) est libre, et génératrice de $\ker(f - \mathrm{Id})$, c'est donc une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$. Cet espace propre est de dimension 1.

3. (a) On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $A^2X = -X \Leftrightarrow \left(A^2 + I\right)X = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y - z$$

donc $\ker\left(f^2+\mathrm{Id}\right)=\mathrm{Vect}\left((1,1,0),(-1,0,1)\right)$. Cette famille est génératrice et libre (2 vecteurs non proportionnels), c'est donc une base de $\ker\left(f^2+\mathrm{Id}\right)$.

Conclusion : $\boxed{v=(1,1,0) \text{ et } w=(-1,0,1)}$

(c) On avait $u=(1,1,1)$.

On montre que la famille (u,v,w) est libre :

Soient a,b,c des réels tels que $au+bv+cw=0$ alors $\begin{cases} a+b-c=0 \\ a+b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-a \\ c=-a \end{cases}$

donc $a=b=c=0$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } (u,v,w) \text{ est une famille libre de trois vecteurs de } \mathbb{R}^3\text{, c'est une base de } \mathbb{R}^3}$

(d) $(x,y,z)\in\ker(g+Id)\Longleftrightarrow (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 & \\ 2x-4y+4z=0 & L_2-2L_1 \\ 3x-8y+7z=0 & L_3-3L_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -8y+6z=0 \\ -14y+10z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y=3/4z \\ z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=z=0$$

Conclusion : $\boxed{\ker(g+Id)=\{0\}}$ et -1 n'est donc pas valeur propre de g.

(e) La somme des dimensions des sous espaces propres est donc $1\neq 3$

Conclusion : $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4. (a)

(b) On avait $g(u)=u$ donc $g^2(u)=g(u)=u$ vecteur propre de g^2 associé à 1.

v et w sont associée à -1

La matrice de g dans la base de vecteurs propres (u,v,w) est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Comme un contre exemple suffit pour prouver qu'une propriété n'est pas universelle,

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} g^2 \text{ est diagonalisable et pourtant, } g \text{ ne l'est pas.} \\ \text{La réciproque était donc bien fausse} \end{array}}$

Exercice 2

1. Pour tout x de $]0;+\infty[$, $x>0$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1}+(x+\ln(x))\,e^{x-1} \\ &= \left(1+\frac{1}{x}+x+\ln(x)\right)e^{x-1} \end{aligned}$$

2. on a donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$

$$x+\ln x+1+\frac{1}{x}=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+1+x>0$$

car $1+x \geqslant 0$

Conclusion : $\boxed{x \in]0,+\infty[\quad x+\ln x+1+\frac{1}{x}>0.}$

3. On a donc $f'(x)>0$ sur $]0,+\infty[$ *Conclusion :* $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$

4. En 0 : $f(x)=(x+\ln x)\,e^{x-1} \to -\infty$

   En $+\infty$: $f(x)=(x+\ln x)\,e^{x-1} \to +\infty$

x	0	1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty \quad \nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   On considère l'application

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x)=\int_1^x f(t)\,dt.$$

   (a) f est continue sur $]0;+\infty[$ donc F est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et $F'(x)=f(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

   On considère l'application de classe C^2

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y)=F(x)+F(y)-2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

   (b) On a, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$

$$\begin{aligned} G'_x(x,y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=F'(x)-2\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ &= f(x)-e^{\frac{x+y}{2}} \\ G'_y(x,y) &= f(y)-e^{\frac{x+y}{2}} \end{aligned}$$

   (c) i. f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc bijective de $]0;+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_0 f;\lim\limits_{+\infty} f\right[=\mathbb{R}$

   ii. Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si $\begin{cases} G'_x(x,y)=0 \\ G'_y(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)-e^{\frac{x+y}{2}}=0 \\ f(y)-e^{\frac{x+y}{2}}=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=f(y) \\ f(y)-e^{\frac{x+y}{2}}=0 \end{cases}$ et comme f est bijective sur $]0;+\infty[$ *et* que x et y en sont éléments,

   $\Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \\ f(y)-e^{y}=0 \end{cases}$

   on résout alors cette seconde équation

$$\begin{aligned} f(y)-e^y=0 &\Longleftrightarrow (y+\ln(y))\,e^{y-1}-e^y=0 \\ &\Longleftrightarrow (y+\ln(y))\,e^{-1}-1=0 \\ &\Longleftrightarrow y+\ln(y)=e \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{(x,y) \in]0;+\infty[^2 \text{ est un point critique de } G \text{ si et seulement si } x=y \text{ et } x+\ln x=e.}$

(d) On peut appliquer le théorème de bijection sur $]0;+\infty[$ puis vérifier que $1<\alpha<e$ en comparant les images, ou plus rapidement :
Soit $k(x)=x+\ln(x)$. k est somme de deux fonctions strictement croissante, donc k est continue et strictement croissante sur $]1;e[$ donc bijective de $]1;e[$ dans $\left]\lim\limits_{1} k;\lim\limits_{e} k\right[= \,]1;e+1[$
et comme $e\in\,]1;e+1[$ alors l'équation $k(x)=e$, admet une unique solution dans $]1;e[$.
et comme k est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle n'en a pas d'autres.
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} x+\ln(x)=e \text{ a une unique solution } \alpha \text{ sur }]0;+\infty[\\ \text{et } 1<\alpha<e \end{array}}$

(e) G a donc un unique point critique (α,α) sur l'ouvert $]0;+\infty[$
Reste à tester $rt-s^2>0$:
On a, pour tout $(x,y)\in\,]0;+\infty[^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) &= f'(x)-\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}\\
\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}\\
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) &= f'(y)-\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}
\end{aligned}$$

et en (α,α) :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\alpha,\alpha) = f'(\alpha)-\frac{1}{2}e^{\alpha}\\
s &= -\frac{1}{2}e^{\alpha}\\
t &= f'(\alpha)-\frac{1}{2}e^{\alpha}
\end{aligned}$$

On simplifie l'expresion de $f'(\alpha)$ en tenant compte du fait que $\alpha+\ln(\alpha)=e$:

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \left(1+\frac{1}{\alpha}+\alpha+\ln(\alpha)\right)e^{\alpha-1}\\
&= \left(1+\frac{1}{\alpha}+e\right)e^{\alpha-1}\\
&= \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)e^{\alpha-1}+e^{\alpha} > e^{\alpha} \text{ et donc}
\end{aligned}$$

$$f'(\alpha)-\frac{1}{2}e^{\alpha} > \frac{1}{2}e^{\alpha}$$

et on a donc $rt-s^2>0$
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} G \text{ a un extremum local unique en } (\alpha,\alpha) \text{ sur l'ouvert }]0,+\infty[^2 \\ \text{et comme } r>0, \text{ c'est un minimum} \end{array}}$