Exercice 2

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application f est définie par : $\forall P \in E,\ f(P) = 2X\,P - (X^2-1)P'$.

1. Soit P un polynôme de E.
   Alors il existe des réels a, b et c tels que $P = aX^2 + bX + c$. D'où

$$\begin{aligned} f(P) &= 2X\,P - (X^2-1)P' \\ &= 2X(aX^2+bX+c) - (X^2-1)(2aX+b) \\ &= 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b) \\ &= bX^2 + 2(a+c)X + b \end{aligned}$$

   Donc $f(P)$ est de degré au plus 2 (b peut éventuellement être égal à 0).

   Ainsi f est bien à valeurs dans E.

   Variante : on raisonne sur le degré de $P \in E$ en distinguant deux cas.

   - 1er cas : si $\deg(P) \leqslant 1$ alors P' est constant (éventuellement nul) et $\deg(X^2-1)P' \leqslant 2$.
     De plus $\deg(2X\,P)$ =$\deg(2X)$+$\deg(P) = 1$+$\deg(P) \leqslant 2$.
     Donc $\deg(f(P)) \leqslant \max\left\{\deg(2X\,P)\,,\, \deg[(X^2-1)P']\right\} \leqslant 2$.
   - 2ème cas : si $\deg(P) = 2$, on note a le coefficient dominant de P. Alors le monôme de plus haut degré de P' est $2aX$, celui de $(X^2-1)P'$ est donc $2aX^3$; et le monôme de plus haut degré de $2X\,P$ est également $2aX^3$.

     On conclut que dans la différence $2X\,P - (X^2-1)P'$, les termes de degré 3 s'annulent. Ainsi $f(P)$ est de degré au plus 2.

2. Soit P et Q deux polynômes de E. Soit λ un scalaire réel.

$$\begin{aligned} f(\lambda\,P+Q) &= 2X\,(\lambda\,P+Q) - (X^2-1)(\lambda\,P+Q)' \\ &= 2X\,\big(\lambda\,P+Q\big) - (X^2-1)\big(\lambda\,P'+Q'\big) \\ &= \lambda\,2X\,P + 2X\,Q - \lambda(X^2-1)P' - (X^2-1)Q \\ &= \lambda\big(2X\,P - (X^2-1)P'\big) - \big(2X\,Q - (X^2-1)Q'\big) \\ &= \lambda\,f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

   Par conséquent f est une application linéaire de E dans E.

3. On commence par calculer les images par f des polynômes formant la base $\mathscr{B}$.
   $f(1) = 2X - (X^2-1)\times 0 = 2X$, $\quad f(X) = 2X^2 - (X^2-1)\times 1 = 1 + X^2$,
   et $f(X^2) = 2X^3 - (X^2-1)\,2X = 2X$. On en déduit que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice A a deux colonnes identiques. Elle a le même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Or les deux colonnes de cette dernière matrice ne sont pas proportionnelles.
   Donc A est de rang 2.
   Comme A n'est pas de rang égal à son ordre 3, A n'est pas inversible.
   Par conséquent l'application linéaire f n'est pas bijective.

4. On pose $Q_1 = (1+X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1-X)^2$.
   Il est faux d'écrire que $Q_1 = (1,2,1)$ ou encore que

$$\mathcal{B}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   Un polynôme n'est pas une matrice colonne et $E \neq \mathbb{R}^3$.

   (a) Soit α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1\,Q_1 + \alpha_2\,Q_2 + \alpha_3\,Q_3 = 0$.
   Alors $\alpha_1\,(1+X)^2 + \alpha_2\,(1-X^2) + \alpha_3\,(1-X)^2 = 0$.
   D'où $\alpha_1\,(1+2X+X^2) + \alpha_2\,(1-X^2) + \alpha_3\,(1-2X+X^2) = 0$.
   Donc $(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)X^2 + 2(\alpha_1-\alpha_3)X + (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 0$.
   On en déduit par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 &=& 0 \\ 2(\alpha_1-\alpha_3) &=& 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 &=& 0 \\ \alpha_1-\alpha_3 &=& 0\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \alpha_1+\alpha_3 &=& 0\ L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}(L_3+L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 &=& 0 \\ \alpha_1-\alpha_3 &=& 0 \\ \alpha_1 &=& 0\ L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}(L_3+L_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_2 &=& 0 \\ \alpha_3 &=& 0 \\ \alpha_1 &=& 0 \end{array}\right.$$

   Ainsi $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est **famille libre** de 3 vecteurs dans un espace vectoriel E qui est de dimension 3.
   $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.

(b)

$$\begin{aligned}
f(Q_1) &= 2XQ_1 - (X^2-1)Q_1' \\
&= 2X(1+X)^2 - (X-1)(X+1)\times 2(1+X) \\
&= 2X(1+X)^2 - 2(X-1)(1+X)^2 \\
&= (1+X)^2\,[2X - 2(X-1)] \\
&= 2(1+X)^2 \\
&= 2\,Q_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(Q_2) &= 2X(1-X^2) - (X^2-1)\times(-2X) \\
&= (1-X^2)(2X-2X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(Q_3) &= 2X(1-X)^2 - (X^2-1)\times(-2)(1-X) \\
&= 2X(1-X)^2 + 2(X-1)(X+1)(1-X) \\
&= (1-X)^2\,[2X - 2(X+1)] \\
&= -2(1-X)^2 \\
&= -2\,Q_3
\end{aligned}$$

(c) On en déduit directement que

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il ne fallait pas utiliser ici la formule du changement de base $A' = P^{-1}A\,P$ dans laquelle P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

(d) D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}(f)$.
D'où $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. Or d'après la question précédente, $f(Q_2) = 0$. Donc $Q_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ avec $Q_2 \neq 0$.

Finalement $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(1-X^2)}$