Final MTB

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème tient compte de la longueur de l'énoncé.

L'utilisation de la calculatrice est interdite. Aucun document n'est autorisé. Les exercices 1 et 2 seront rédigés des copies différentes.

Exercice 1 : Applications linéaires (14 points)

Soit $\mathscr{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $a + b + c = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$, qui à tout vecteur $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, associe le vecteur $f(\mathbf{u})$ défini par : $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \Big(x + y + z\Big)\mathbf{n}$.

1. (a) Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, et $f(\mathbf{e}_3)$ en fonction des réels a, b et c.
   (c) Donner la matrice A de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. On désigne par $\ker f$ le noyau de f et par $\operatorname{Im} f$ l'image de f.
   (a) Calculer $f(\mathbf{n})$, et en déduire que $\mathbf{n}$ appartient à $\ker f$.
   (b) En déduire que le rang de f est inférieur ou égal à 2.
3. (a) Montrer que $f \circ f = f$.
   (b) Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Montrer l'équivalence $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} f \iff f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.
   (c) Montrer que les vecteurs $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ appartiennent à $\operatorname{Im} f$.
   (d) En déduire le rang de f, ainsi qu'une base de $\operatorname{Im} f$.
4. (a) Déterminer la dimension et une base du noyau de f.
   (b) Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe, puis qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   En déduire que $\mathscr{B} = \Big(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\, , \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\, , \mathbf{n}\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 : Fonctions de deux variables (9 points)

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 y + y (\ln y)^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
2. Soit $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
   On admettra pour la suite de l'exercice que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
   (a) Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f sur U.
   (c) Montrer que f admet deux points critiques sur U qui sont $(0, 1)$, et $\left(0, \mathrm{e}^{-2}\right)$.
   (d) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f sur U.
   (e) Calculer la matrice hessienne de f aux points critiques.
   (f) Montrer que f admet un unique extremum local sur U, et préciser la nature de cet extremum.
3. Déterminer les extrema globaux de f sur son ensemble de définition.