Exercice 1. On pose pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Justifier que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de φ.
3. En déduire la limite ℓ de φ en 0.
4. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \geq 0$.

   (b) Déduire des questions précédentes que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   (c) En déduire l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abcsisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

Correction 1.

1. Les fonctions exp, cos et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$, donc φ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. On sait que :
   - $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)$, où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$,
   - $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon_2(x)$, où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.

   Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon_2(x)\right) + x^3\varepsilon_3(x)}{x} \\
&= \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_3(x)}{x} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_3(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0.
\end{aligned}$$

3. On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_3(x)\right) = 1.$$

4. (a) Si on pose $\varphi(0) = 1$, alors φ est continue en 0 (puisque $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 1 = \varphi(0)$). D'autre part, d'après la question 1, φ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc φ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc bien définie et est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (b) D'après la question 2, on a :

$$f'(x) = \varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_3(x).$$

   Donc en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{x^3}{3}}{6} + x^3\varepsilon_4(x), \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0 \\
&= f(0) + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0
\end{aligned}$$

Or

$$f(0) = \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

D'où :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

(c) De ce développement limité, on déduit que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 est :

$$y = x.$$

Et puisque,

$$f(x) - x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x),$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2}{2} \geq 0,$$

on en déduit que $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T au voisinage de 0.

Exercice 2. Soit g l'application définie par :

$$g \ : \ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que g est strictement croissante et dresser son tableau de variations.
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
3. On considère l'application

$$F \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^y + y\ln(x) \end{array}$$

On admet que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.

(a) Calculer les dérivées partielles premières de F.

(b) Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de F au point de coordonnées $(1, 0, F(1,0))$.

(c) Montrer que F admet comme unique point critique le point $(\alpha, \ln(\alpha))$.

(d) Déterminer la nature de ce point critique.

Correction 2. 1. Il est clair que g est dérivable sur son domaine de définition. De plus :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0.$$

On en déduit que g est strictement croissante, de limite $-\infty$ (respectivement $+\infty$) en 0 (respectivement en $+\infty$).

2. Comme g est strictement monotone, elle établit une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[)$ Or, d'après le tableau de variations,

$$0 \in g(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$$

Donc, l'équation $g(x) = 0$ admet bien une unique solution sur $]0,+\infty[$.

3. (a) On trouve pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^y + \frac{y}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^y + \ln(x)$$

(b) L'équation du plan tangent est donnée par :

$$z = F(1,0) + \frac{\partial F}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,0)(y-0).$$

En remplaçant on obtient :

$$z = x + y.$$

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Alors, (x,y) est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x,y) = 0$. Or :

$$\left\{\begin{array}{l} e^y + \dfrac{y}{x} = 0 \\ xe^y + \ln(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^y = -\dfrac{y}{x} \\ -y + \ln(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{\ln(x)}{x} \\ y = \ln(x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ln(x) + x^2 = 0 \\ y = \ln(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \ln(\alpha) \end{array}\right.$$

Donc l'unique point critique de F est $(\alpha, \ln(\alpha))$.

(d) Nous allons donc utiliser les notations de Monge pour étudier la nature du point critique. Les dérivées partielles d'ordre 2 de F sont données par :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = xe^y \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y + \frac{1}{x}$$

Donc au point $(\alpha, \ln(\alpha))$, on a

$$r = -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}, \quad s = \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad t = \alpha^2.$$

On a donc :

$$rt - s^2 = -\ln(\alpha) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = -2 - \frac{1}{\alpha} < 0.$$

Ainsi F admet un point selle en $(\alpha, \ln(\alpha))$.