Final MTB, Printemps 2018

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.
Tous les exercices sont à rendre sur des copies séparées.

Analyse

Exercice 1 : Fonctions de deux variables (5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère la fonction $f\colon (x,y) \mapsto \ln(1-x^2-y^2)$.

a. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de f.

b. Soit $\alpha > 0$. Déterminer $L_{-\alpha}$ la ligne de niveau $-\alpha$ de f.

2. Soit f la fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer l'équation du plan tangent à f au point de coordonnées $(1,-1,f(1,-1))$.

c. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.

d. Étudier la nature de ce(s) point(s) critique(s).

Exercice 2 : Intégrales et développements limités (7 points)

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. **a.** Donner l'ensemble de définition D de f.

b. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

c. En déduire que f admet un prolongement continu et dérivable en 0. On notera f ce prolongement, et D' le nouvel ensemble de définition. Préciser la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.

d. Donner une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de la courbe représentative de f et T.

2. Dans la suite, on s'intéresse à l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On ne cherche pas à calculer une valeur exacte de I. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad Q_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}.$$

a. Préciser pourquoi I est bien définie.

b. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Indication. On pourra utiliser la formule $\forall t \in [0,1], 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-t)^n}{1+t}$.

Dans la suite de l'exercice, on notera $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1], R_n(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c. Établir la majoration $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1], |R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall x \in]0,1]$, $Q'_n(x) - f(x) = \dfrac{R_n(x)}{x}$. En déduire que $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\displaystyle\int_0^1 \left(Q'_n(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Que peut-on dire sur $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$?

Algèbre

Exercice 3 : Applications linéaires (6 points)

On note $B = (e_1 , e_2 , e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose enfin $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $w = e_1 + f(e_1)$.

1. **a.** Calculer le vecteur w.

b. Démontrer que la famille $C = (u , w , e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Expliciter la matrice P de passage de la base B vers la base C.

2. **a.** Déterminer la matrice T de f dans la base C.

b. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c. Donner sans justification, le lien entre les matrices T, A, P et P^{-1}.

3. Le but de la fin de l'exercice est de trouver une matrice carrée $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité :

$$X_0^2 - 2X_0 - I_3 = A.$$

Soit X une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1} X P$.

a. Vérifier que $Y^2 = P^{-1} X^2 P$.

b. Montrer que si Y vérifie l'équation $(\star)$: $Y^2 - 2Y - I_3 = T$
alors X vérifie $X^2 - 2X - I_3 = A$.

4. **a.** Déterminer la matrice $Y_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $(\star)$ et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

b. En déduire une matrice X_0 solution de $X^2 - 2X - I_3 = A$.
On exprimera X_0 à l'aide de P et de P^{-1} sans chercher à calculer les 9 coefficients de la matrice X_0.

Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

NOM : Prénom :

Cet exercice est à rédiger directement sur cette feuille. Indiquez votre état civil ci-dessus.

Exercice 4 : Questions de cours (3 points)

1. Énoncer le théorème du rang.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Soient n et p deux entiers non nuls et soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

a. Démontrer à l'aide du théorème du rang que si $n < p$ alors f n'est pas surjective.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

b. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple *simple* que la réciproque est fausse (on ne demande pas de jusifiter).

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .