Final MTB, Printemps 2019

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.
Tous les exercices sont à rendre sur des copies séparées.

Exercice 1 : Fonctions de deux variables (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=x^4-x\,y^3+3\,y^4$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet un unique point critique a que l'on précisera.
3. (a) Développer l'expression : $\left(x^2-\dfrac{y^2}{2}\right)^2+\left(xy-\dfrac{y^2}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}y^4$
   (b) La fonction f possède-t-elle un extremum ? Est-il global ou seulement local ?

Exercice 2 : Applications linéaires (6 points)

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel, et $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. On considère l'application $S:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})&\to&\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M&\mapsto&JMJ\end{array}\right.$.
On note Id l'application identité sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que S est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer J^2, en déduire que J est inversible, et donner J^{-1}.
   (c) Montrer que $S\circ S=\mathrm{Id}$. En déduire que S est bijectif.
2. On considère les éléments $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (I,J,K,L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice de S dans la base (I,J,K,L).
3. Soient $E_1=\ker(S-\mathrm{Id})$, et $E_{-1}=\ker(S+\mathrm{Id})$.
   (a) Montrer que E_1 et E_{-1} sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Pour $A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}$, chercher $A_1\in E_1$ et $A_{-1}\in E_{-1}$ tels que $A=A_1+A_{-1}$.

Exercice 3 : Intégration et développements limités (6 points)

1. Rappeler, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^{\alpha}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\cos x}. \end{array} \right.$$

3. On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

   Justifier que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Démontrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
5. (a) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Déduire de la question précédente l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage de 0.