Exercice 1 (Développements limités).

1. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en zéro de la fonction $x \mapsto \cos x$.

   (b) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$.

2. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de zéro, de la fonction

$$f \;:\; x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cos x.$$

   (b) En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point $O(0,0)$.
   Préciser la position locale de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage du point O.

Solution 1. 1. (a) Soit x au voisinage de 0, alors :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x),$$

où ε_1 est une fonction de limite nulle en 0.

(b) Soit u au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{2!}u^2 + u^2\varepsilon_2(u),$$

où ε_2 est une fonction de limite nulle en 0. Ainsi, après simplification :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2\varepsilon_2(u).$$

2. (a) D'après ce qui précède, pour x au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}\left(x^2\right)^2 + \left(x^2\right)^2\varepsilon_2(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon_3(x),$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon_2(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)\right) \\ &= \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

(b) La partie affine du développement limité trouvé à la question précédente correspond à l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. On trouve donc :

$$T \;:\; y = 0.$$

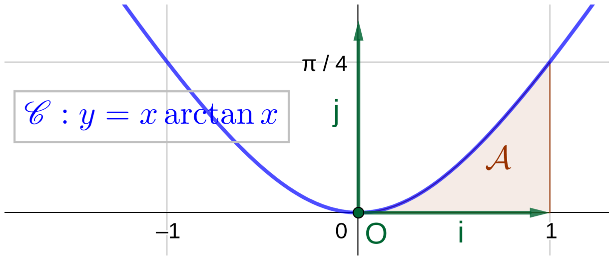
De plus, pour x au voisinage de 0 :

$$f(x) - 0 = \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x) \geqslant 0.$$

On en déduit que, au voinsinage de 0, $\mathscr{C}$ se situe au-dessus de T.

Exercice 2 (Calcul intégral)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j},\right)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x\ \arctan x$.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface située en dessous de la courbe $\mathscr{C}$, au dessus de l'axe des abscisses $(O\,;\vec{i})$ et entre les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On pourra effectuer une intégration par parties et on remarquera que :
$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}$.

2. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Solution 2. 1. On sait que :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 x \arctan(x)\,\mathrm{d}x.$$

On remarque que

$$\mathcal{A} = \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

où u et v sont les fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \arctan(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan(1) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\big[x\big]_0^1 + \frac{1}{2}\big[\arctan(x)\big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. Calculons l'intégrale suivante en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$

- Puisque $u=\sqrt{x}$ alors $x=u^2$.
- Terme différentiel : $x=u^2$ donc $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=2u$. Ainsi : $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$.
- Calcul des nouvelles bornes :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \implies u=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{4} \implies u=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

- Intégrande : puisque $\sqrt{x}=u$ et $x=u^2$, alors on peut écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}.$$

On déduit des trois points précédents que :

$$I=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}2u\,\mathrm{d}u=2\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u=2\big[\arcsin(u)\big]_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Exercice 3 (Commutant d'une matrice)**.**
On se donne la matrice carrée $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par F l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM=MA$.

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On pose $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont des nombres réels.
   (a) En résolvant un système linéaire d'inconnues x, y, z, t, déterminer la forme des matrices M appartenant à F.
   (b) En déduire une base de F.

Solution 3. 1. - Il est clair que la matrice nulle 0_2 est dans F car $0_2A=A0_2=0_2$.
- Soit $(\lambda,M,N)\in\mathbb{R}\times F\times F$. Alors :

$$A\left(\lambda M+N\right)=A\lambda M+AN=\lambda AM+AN=\lambda MA+NA=\left(\lambda M+N\right)A.$$

  Donc $\lambda M+N\in F$.

On en déduit que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$.

2. (a) Avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} M\in F &\iff AM=MA\\ &\iff \begin{pmatrix}-x & -y\\ 3x+2z & 3y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+3y & 2y\\ -z+3t & 2t\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}-x=-x+3y\\ -y=2y\\ 3x+2z=-z+3t\\ 3y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}3y=0\\ 3y=0\\ 3x+3z-3t=0\\ y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=0\\ t=x+z.\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, les matrices de F sont les matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x+z \end{pmatrix},$$

avec x et z deux réels quelconques.

(b) D'après ce qui précède, une famille génératrice de F est :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

car

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On remarque que cette famille est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, il s'agit donc d'une base de F.

Exercice 4 (Étude d'une application linéaire)**.**
On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & E \\ & & P & \mapsto & P'' - \dfrac{1}{3} X\, P' + P \end{array}$$

On admet que φ est à valeurs dans E.

1. (a) Donner sans justification la dimension de E.
   (b) Prouver que φ est une application linéaire.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E.
   (b) Calculer le rang de A. En déduire la dimension du noyau de φ.
   (c) Exprimer $\varphi(X^3)$ en fonction de $\varphi(X)$.
   En déduire une base de $\text{Ker}\,\varphi$.

Solution 4. 1. (a) On sait que $\dim E = 4$.

(b) Soient P et Q deux polynômes appartenant à E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot P + Q) &= (\lambda \cdot P + Q)'' - \frac{1}{3} X\,(\lambda \cdot P + Q)' + (\lambda \cdot P + Q) \\ &= \lambda\, P'' + Q'' - \frac{1}{3} X\,(\lambda\, P' + Q') + \lambda\, P + Q \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda \left(P'' - \frac{1}{3} X\, P' + P \right) + \left(Q'' - \frac{1}{3} X\, Q' + Q \right) \\ &= \lambda \cdot \varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

2. (a) Pour obtenir la matrice A de φ relativement à la base $\mathscr{B}$, on calcule les images par φ des polynômes de $\mathscr{B}$, en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$.
   - $\varphi(1) = 1$
   - $\varphi(X) = 0 - \frac{1}{3}X.1 + X = \frac{2}{3}X$
   - $\varphi(X^2) = 2 - \frac{1}{3}X\,(2X) + X^2 = 2 + \frac{1}{3}X^2$
   - $\varphi(X^3) = 6X - \frac{1}{3}X\,(3X^2) + X^3 = 6X$

On en déduit $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Calculons le rang de A :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_4 \leftarrow 2/3C_4 - 6C_2 \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

D'après le théorème du rang, puisque φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\dim(E) = \dim\left(\text{Ker}(\varphi)\right) + \dim\left(\text{Im}(\varphi)\right).$$

Or $\dim\left(\text{Im}(\varphi)\right) = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A)$. Donc, d'après la question précédente : $\dim\left(\text{Im}(\varphi)\right) = 3$. D'après la question 1, on a : $\dim(E) = 4$. Par conséquent :

$$\dim\left(\text{Ker}(\varphi)\right) = \dim(E) - \dim\left(\text{Im}(\varphi)\right) = 4 - 3 = 1.$$

(c) Puisque $\text{Ker}(\varphi)$ est de dimension 1, tout vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi)$ forme une base de $\text{Ker}(\varphi)$. Or, dans la question 2(a), on avait obtenu :

$$\begin{cases} \varphi(X) = \frac{2}{3}X \\ \varphi(X^3) = 6X = \frac{18}{3}X = 9\left(\frac{2}{3}X\right) = 9\varphi(X). \end{cases}$$

Ainsi, par linéarité de φ :

$$\underline{\varphi(X^3 - 9X)} = \varphi(X^3) - 9\varphi(X) = 0 \underline{= 0_E}.$$

Autrement dit : $X^3 - 9X \in \text{Ker}(\varphi)$.

Par conséquent, la famille $\left(X^3 - 9X\right)$ est une base de $\ker(\varphi)$.