Nom Prénom

☐A ☐B ☐C ☐D ☐E ☐F ☐G ☐H ☐I
☐J ☐K ☐L ☐M ☐N ☐O ☐P ☐Q ☐R
☐S ☐T ☐U ☐V ☐W ☐X ☐Y ☐Z

Pour la partie QCM, chaque question peut comporter une ou plusieurs bonnes réponses. Les réponses fausses seront comptées négativement.

1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Soit

$$F : \begin{array}{rcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Parmi ces égalités, laquelle (lesquelles) est (sont) juste(s) ?

- ☐ $\forall x \in I, \quad F'(x) = 2f(x) - f(2x)$
- ☐ $\forall x \in I, \quad F'(x) = 2f(2x) - f(x)$
- ☐ $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(2x) - f(0)$
- ☐ $\forall x \in I, \quad F'(x) = 2f(2x) - f(0)$

2 La dérivée de la fonction arctan est donnée pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

- ☐ $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\dfrac{1}{\arccos^2(x)}$
- ☐ $1 + \arctan^2(x)$
- ☐ $\dfrac{1}{1+x^2}$

3 Que vaut arctan(1) ?

- ☐ $\dfrac{-\pi}{3}$
- ☐ $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{3}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- ☐ $\dfrac{3\pi}{4}$

4 Un système de deux équations linéaires à trois inconnues admet :

- ☐ Aucune solution
- ☐ On ne peut pas répondre de manière générale
- ☐ Une infinité de solutions
- ☐ Exactement une solution
- ☐ Exactement deux solutions

5 Soit A une matrice de taille 2×3 et B une matrice de taille 3×2. Le produit AB est :

- ☐ Une matrice 2×2
- ☐ Une matrice 2×3
- ☐ Une matrice 3×3
- ☐ Impossible
- ☐ Une matrice 3×2

6 Soient A, B et C trois matrices de $M_n(\mathbb{R})$, λ un réel et p un entier. La ou lesquelles de ces propriétés est (sont) **fausse(s)** en général ?

- ☐ $A(B+C) = AB + AC$
- ☐ $(AB)^p = A^p B^p$
- ☐ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- ☐ $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$
- ☐ Elles sont toutes justes

Médian MT2A - Printemps 2022

Note : *L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.* ***En particulier, sauf mention contraire, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.***

Exercice 1. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^2$?

$$\mathcal{F}_1 = ((-1,-1),(2,2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = ((0,1),(1,-1),(2,3)) .$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On note encore :

- $F = \{P \in E,\ P'(1) = 0\}$,
- $G = \text{Vect}\left(X^2\right)$.

Si besoin, vous pouvez admettre les résultats des questions que vous n'arrivez pas à faire.

1. Rappeler sans justification la base canonique de E ainsi que $\dim(E)$.
2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in E$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, b et c a-t-on $P \in F$?
4. On admet que $\dim(F) = 2$. Démontrer que $\left(1, 2X - X^2\right)$ est une base de F.
5. Déterminer une base de $F + G$ puis sa dimension.
6. Rappeler la formule de Grassmann. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E ?