Mathématiques - MT12

Tronc commun

Médian - Printemps 2012

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice ou d'un téléphone est interdite. Une feuille de notes est autorisée.
Les exercices 1 et 2 sont à rédiger sur des copies différentes. L'exercice 3 est à faire directement sur la feuille.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Exercice 1 (6 points) Justifier soigneusement la rédaction.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5. Soit $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ une base de E.

1. On définit $b'_1 = b_1 + b_2$, $b'_2 = b_2 + b_3$, $b'_3 = b_3 + b_4$, $b'_4 = b_4 + b_5$, et $b'_5 = b_5$. Montrer que la famille $B' = \{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5\}$ est une base de E.
2. Soit $x \in E$ avec $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ (coordonnées de x dans B).
   Quelles sont les coordonnées de x dans la base B' ?
3. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = \{b_1 + b_2, 2.b_2 + b_5, b_5 - 2.b_1, b_3 + b_2 + b_5\}$.
4. Donner une base d'un supplémentaire G de $F = \text{vect}(\mathcal{F})$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 (10 points)

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit k un nombre complexe fixé, on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_2) = 0, \qquad \text{et} \qquad f(e_1) = f(e_3) = ke_1 + e_2 - ke_3$$

1. Calculer $f(e_1 + ie_2 - e_3)$.
2. (a) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$, et donner le rang de f.
   (b) En déduire la dimension du noyau de f, et montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_2, e_1 - e_3)$.
3. Écrire la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, et calculer A^2. En déduire sans calcul $f \circ f$.
4. On pose $e'_1 = f(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$, et $e'_3 = e_3$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f dans cette nouvelle base.
   (c) En déduire que 0 est la seule valeur propre de A. A est-elle inversible ?
   A est-elle diagonalisable ?
5. Pour tout complexe z non nul, on note $B(z) = A - zI$,
   I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer sans calcul que la matrice $B(z)$ est inversible.
   (b) Calculer $(A - zI) \times (A + zI)$, puis écrire $\big(B(z)\big)^{-1}$ en fonction de z, I, et A.
   (c) Pour tout entier naturel n, déterminer $\big(B(z)\big)^n$ en fonction de n, z, I, et A.

Nom : .... Prénom : .... Groupe de TD : ......

On répondra à cet exercice directement sur la feuille. À détacher, et à rendre avec les autres copies.

Exercice 3 (4 points) Les questions sont indépendantes.

1. Soient E, F, et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer qu'alors Im f $\subset$ Ker g.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Montrer qu'il y a équivalence entre :

$$\Big(f \text{ est injective}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\{f(b_1), f(b_2), \cdots, f(b_n)\} \text{ est une famille libre de } F\Big)$$

Exercice 1

1. Montrons que la famille B' est libre dans E. Pour cela, considérons 5 scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ tels que $\lambda_1 b'_1 + \lambda_2 b'_2 + \cdots + \lambda_5 b'_5 = 0_E$. En regardant cette égalité dans la base B, on obtient le système :
$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & = 0 \\ \lambda_4 + \lambda_5 & = 0 \end{array}\right.$$
Ce qui montre que la famille est libre, et comme elle a autant d'éléments que la dimension de l'espace E, c'est bien une base.

2. On peut facilement inverser le système donné dans la première question :
$$\left\{\begin{array}{ll} b_5 & = b'_5 \\ b_4 & = b'_4 - b_5 = b'_4 - b'_5 \\ b_3 & = b'_3 - b_4 = b'_3 - b'_4 + b'_5 \\ b_2 & = b'_2 - b_3 = b'_2 - b'_3 + b'_4 - b'_5 \\ b_1 & = b'_1 - b_2 = b'_1 - b'_2 + b'_3 - b'_4 + b'_5 \end{array}\right.$$
Soit alors $x \in E$: en décomposant x dans la base B, on obtient :
$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_5 b_5$$
$$x_{B'} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

3. En regardant les coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ dans la base B, cela revient à calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule ce rang en appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice. On commence par l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1$. Ce qui donne :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On enlève C_3 (car $C_3 = C_2$), et on calcule $C_4 \leftarrow 2C_4 - C_2$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est étagée, donc son rang vaut 3. Ainsi le rang de la famille $\mathcal{F}$ est 3.

4. On complète $\mathcal{F}$ en une base de E, pour cela, on reprend le système précédent auquel on ajoute des vecteurs pour obtenir un système qui est toujours étagé. On peut par exemple prendre comme base de G la famille $\{b_4, b_5\}$.

Exercice 2

1. f étant linéaire,
   $f(e_1 + i\,e_2 - e_3) = f(e_1) + i\,f(e_2) + (-1)\cdot f(e_3) = f(e_1) - f(e_3) = \overrightarrow{0_E}$.

2. (a) Par définition de l'image,

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Im} f &\iff \exists\, u \in E \;/\; w = f(u) \\ &\iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \;/\; w = f(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3) \\ &\iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \;/\; w = x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3) \\ &\iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \;/\; w = (x+z)\,f(e_1) \\ &\iff \exists\,\lambda \in \mathbb{C} \;/\; w = \lambda\,f(e_1) \\ &\iff w \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1)) \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1))}$ et $(f(e_1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$ et libre (un seul vecteur non nul) donc une base de $\mathrm{Im} f$.
   Enfin $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Imf}) = 1$

   (b) • D'après le **théorème du rang**, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg}(f)$
   Comme $\dim(E) = 3$, on obtient $\dim(\mathrm{Ker} f) = 3 - 1 = 2$.

   • Il suffit donc de vérifier que les deux vecteurs donnés appartiennent à $\mathrm{Ker} f$ et qu'ils sont linéairement indépendants :
   $f(e_2) = \overrightarrow{0_E}$ et $f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3)$ car f est linéaire
   d'où $f(e_1 - e_3) = \overrightarrow{0_E}$. Donc ils appartiennent bien à $\mathrm{Ker} f$.

   Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est une base, elle est libre.
   Soit x et y deux nombres complexes tels que $x\,e_2 + y\,(e_1 - e_3) = \overrightarrow{0_E}$ alors $x = y = -y = 0$.
   Donc $(e_2, e_1 - e_3)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker} f$ de deux vecteurs.
   Par conséquent $\boxed{(e_2\,,\,e_1 - e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f.}$

3. L'énoncé fournit les images par f des vecteurs $e_1,\ e_2,\ e_3$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix}$$

   Et $A^2 = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{O}_3$

   A^2 est la matrice associée à $f \circ f$ dans la base $\mathscr{B}$ donc $\boxed{f \circ f = \widetilde{0}_{\mathscr{L}(E)}}$

4. (a) Calculons le déterminant de la famille $(e_1',\ e_2',\ e_3')$ dans la base initiale $\mathscr{B}$, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1'\,,\ e_2'\,,\ e_3') = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -k & -1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)\times \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = k\times 0 - 1\times 1 = -1$$

Ce déterminant est non nul, donc $\boxed{\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3') \text{ est une base de } E}$

(b) On calcule les images par f de ces vecteurs puis leurs coordonnées dans la «nouvelle» base $\mathscr{B}'$:

$f\,(e_1') = f\,(f\,(e_1)) = \overrightarrow{0_E}$ car $f\circ f = \widetilde{0}_{\mathscr{L}(E)}$

$f\,(e_2') = f\,(e_1 - e_3) = \overrightarrow{0_E}$ car $(e_1 - e_3) \in \text{Ker}f$

$f\,(e_3') = f\,(e_3) = f\,(e_1) = e_1' = 1\,e_1' + 0\,e_2' + 0\,e_3'$

Ainsi $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(c) Puisque A' est une matrice triangulaire, ses valeurs propres (qui sont aussi celles de f) sont les coefficients de sa diagonale. Donc zéro est la seule valeur propre de A', de A et de f.

Ainsi $\boxed{\text{la seule valeur propre de } A \text{ est } 0.}$

D'après la question 2.(b), f n'est ni injective, ni bijective donc A **n'est pas inversible**.

Pour que f soit diagonalisable, il faut que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres soit égale à la dimension de E, à savoir 3. Or ici le seul sous-espace propre de f est $E_0(f) = \text{Ker}f$ et il n'est pas de dimension 3.
On en déduit que A **n'est pas diagonalisable**.

5. (a) Le déterminant de la matrice $B(z)$ est également le polynôme caractéristique de la matrice A : $P_A(z) = \det(B(z)) = -z^3$.

Ce polynôme admet zéro comme racine triple.

Par conséquent, $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, $\det(B(z)) \neq 0$ et la matrice $B(z)$ est inversible pour tout complexe z non nul.

(b) • On développe : $(A - z\,I)\,(A + z\,I) = A^2 + z\,AI - z\,IA - z^2I^2 = -z^2\,I$

• Or $z \neq 0$ Donc $B(z)\left[\dfrac{-1}{z^2}\,(A + z\,I)\right] = I$

avec $\dfrac{-1}{z^2}\,(A + z\,I) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. En conclusion, $\boxed{\big(B(z)\big)^{-1} = -\dfrac{1}{z^2}\,(A + z\,I)}$

(c) On rappelle que $B(z) = A + (-z\,I)$

Comme les matrices A et $(-z\,I)$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

D'où pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
[B(z)]^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \,(-z\, I)^{n-k} \text{ et comme } A^k = \mathrm{O}_3 \text{ pour } k \geqslant 2 \\
B(z)^n &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} A^k \,(-z\, I)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{O}_3 \\
&= \sum_{k=0}^{1} (-z)^{n-k} \binom{n}{k} A^k \\
&= (-z)^n \, I + n\,(-z)^{n-1}\, A
\end{aligned}$$

Finalement pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{[B(z)]^n = (-z)^{n-1}(n\,A - z\,I)}$$

Exercice 3

1. Soit y appartenant à Im f. Par définition de l'image, il existe x appartenant à E tel que $y = f(x)$. Ainsi, $g(y) = g \circ f(x) = 0$. Ce qui traduit le fait que y est dans le noyau de g. Ainsi, on a bien démontré que Im f $\subset$ Ker g.

2. *c.f.* cours.