Mathématiques - MT12

Tronc commun

Médian - Printemps 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice ou d'un téléphone est interdite. Une feuille de notes est autorisée.
Les parties 1 et 2 sont à rédiger sur des copies différentes.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Partie 1

Exercice 1 (4 points) Questions de cours. Justifier soigneusement la rédaction.

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Soit G un sous-espace vectoriel de F.

   Montrer que l'image réciproque par f de G, est un sous-espace vectoriel de E.
   Rappel : l'image réciproque de l'ensemble G est $f^{-1}(G) = \{x \in E, f(x) \in G\}$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
   Rappel : f est injective lorsque $\forall x_1, x_2 \in E, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Exercice 2 (6 points) On identifiera les vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ aux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$.

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$, et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2.x + y = z \right\}$.

1. Déterminer la dimension de F_1 et donner une base de F_1.

2. Déterminer la dimension de F_2 et donner une base de F_2.

3. Peut-on trouver un sous-espace vectoriel F_3 de E qui soit un supplémentaire de F_1 et de F_2 ? Si oui, donner une base de F_3, sinon, justifier.

4. Déterminer les coordonnées du vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans l'union des bases de F_1 et F_3 choisies dans les questions précédentes.

5. Déterminer $F_1 \cap F_2$.

Pensez à changer de copie.

Avez-vous changé de copie ?

Partie 2

__Exercice 3__ (10 points) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On considère alors l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & f(P(X)) = 2XP(X) - (X^2-1)P'(X) \end{array} \right.$$

1. (a) Soit $P(X) \in E$. En écrivant $P(X) = a + bX + cX^2$ (où a, b, c sont des coefficients réels), donner sous forme développée l'expression des coefficients de $f(P(X))$. En déduire que f est bien définie (si $P \in E, f(P) \in E$).
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Calculer les polynômes $f(1)$, $f(X)$, et $f(X^2)$. En déduire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Donner le rang de f, et proposer une base $\mathcal{F}$ de $\operatorname{Im} f$.
   (b) Donner la dimension du noyau de f, et proposer une base $\mathcal{G}$ de $\ker f$.
   (c) $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont-ils supplémentaires ?
3. (a) Soit $\mathcal{H} = \big(X, X^2+1, X^2-1\big)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice B de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{H}$.