Mathématiques - MT12
Tronc commun
Médian - Printemps 2014

Durée de l'épreuve : 90 minutes

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.
Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (10 points)

a désigne un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$$

On ne cherchera pas à expliciter I_n.

1. Calculer, en fonction de a, I_0.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0\,,a]$:

$$0 \leqslant \frac{x^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

   (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On rappelle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.
3. Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k = I_{k-1} - \dfrac{a^k}{k!} \, \mathrm{e}^{-a}$
4. Déduire de ce qui précède que :

$$I_n = I_0 - \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

5. En déduire finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

Changer de copie

Exercice 2 (10 points) Cet exercice comporte deux études de fonctions (Partie A et Partie B). Les résultats de la partie A peuvent être utilisés dans la partie B. La courbe représentative d'une fonction g sera notée $\mathcal{C}_g$.

Partie A : Étude de la fonction $g : x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et étudier la parité de g.
2. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction g.
   (b) Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $x = 0$, et préciser la position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à cette tangente.
   (c) Justifier que pour tout réel x, $g'(x) = 1 + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$.
3. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en zéro ($u > 0$) de la fonction $u \mapsto u^2 g\left(\dfrac{1}{u}\right)$.
   (b) En déduire que $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{2} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où $\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.
4. Calculer l'aire de la surface grisée de la figure 1 ci-dessous.

Partie B : Étude de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x\sqrt{1+x^2})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer f', et montrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{1+x^2+x^4} \qquad \text{où } g \text{ est la fonction de la partie A.}$$

2. Donner le développement limité de f' en 0 à l'ordre 2.
3. En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

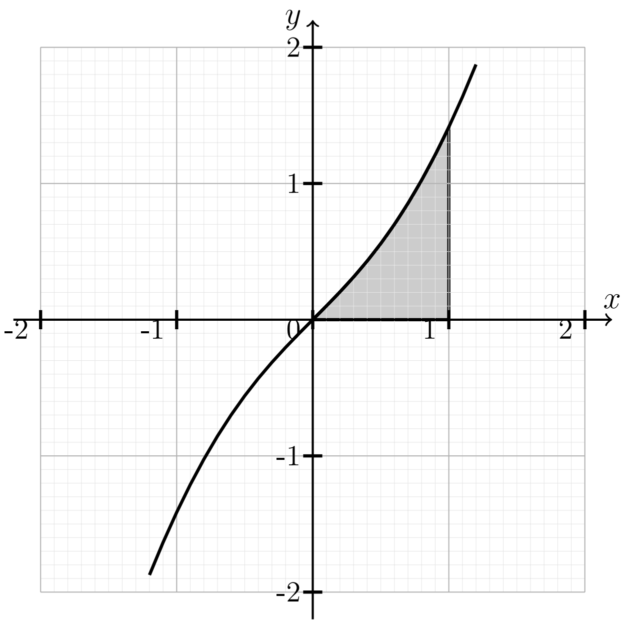

Figure 1: Représentation graphique de $x \mapsto g(x)$