Médian MTB

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.
Aucun document n'est autorisé pendant l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.
Les trois exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 : Espaces vectoriels (5 points)

1. Soient $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y + 6z = 0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - y - 3z = 0\}$. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. On admettra pour la suite de l'exercice que F_2 est aussi un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

2. Soit $(E, +, \cdot)$ un espace-vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que l'ensemble $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Déduire des questions précédentes que l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ du système linéaire homogène

$$\begin{cases} 2x - y + 6z = 0 \\ x - y - 3z = 0, \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Veuillez rédiger cet exercice sur une nouvelle copie.

Exercice 2 : Intégrales (8 points)

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$,

et $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Soit x un réel strictement positif, calculer $G'(x)$.

c. Calculer la valeur de $G'(0)$.

2. **a.** Soit $x \in]0, +\infty[$, montrer que :

$$\forall t \in [x, 2x],\; \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{t} \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{t}.$$

b. En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (1 - \mathrm{e}^{-x}) \ln 2 \leqslant G(x) \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-2x}) \ln 2.$$

c. Calculer la limite de G lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que G réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. On notera alors G^{-1} sa fonction réciproque.

4. Déterminer l'ensemble K des points en lesquels G^{-1} est dérivable.

Veuillez rédiger cet exercice sur une nouvelle copie.

Exercice 3 : Développements limités (8 points)

1. **a.** Rappeler sans justification, le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de zéro.

b. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en zéro de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1\,,\,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue en zéro.

b. Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.

c. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'(0)$.

3. On définit la fonction g sur $I \setminus \{0\}$ par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

a. Montrer que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \exp\left(f(x) - 1\right)$ est :

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de g.

Indication. On rappelle que pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$.

Exercice 1 : Espaces vectoriels.

1. L'ensemble $F_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 6z = 0\big\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

– Les composantes du vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ vérifient bien l'égalité $2\times 0 - 0 + 6\times 0 = 0$, donc le vecteur nul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ **appartient à** $\boldsymbol{F_1}$.

– Soient $u = (x,y,z)$ et $\widetilde{u} = (\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ deux éléments de F_1. Les composantes du vecteur $u + \widetilde{u} = (x+\widetilde{x}, y+\widetilde{y}, z+\widetilde{z})$ vérifient la relation

$$2\,(x+\widetilde{x}) - (y+\widetilde{y}) + 6\,(z+\widetilde{z}) = (2x - y + 6z) + (2\widetilde{x} - \widetilde{y} + 6\widetilde{z})\,.$$

Or, $2x - y + 6z = 0$ (car $u \in F_1$) et $2\widetilde{x} - \widetilde{y} + 6\widetilde{z} = 0$ (car $\widetilde{u} \in F_1$). Donc

$$2\,(x+\widetilde{x}) - (y+\widetilde{y}) + 6\,(z+\widetilde{z}) = 0,$$

ce qui prouve que $u + \widetilde{u} \in F_1$. Ainsi $\boldsymbol{F_1}$ **est stable pour l'addition**.

– Soient $u = (x,y,z) \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $u \in F_1$, on a $2x - y + 6z = 0$. Ainsi, $2(\lambda x) - (\lambda y) + 6(\lambda z) = \lambda(2x - y + 6z) = \lambda \times 0 = 0$. Donc le vecteur $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à F_1. Ainsi $\boldsymbol{F_1}$ **est stable pour la multiplication externe**.

Il suit donc que $\boldsymbol{F_1}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\big(\mathbb{R}^3 +, \cdot\big)$.

2. Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

– F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous les deux le vecteur nul 0_E. Donc $\mathbf{0}_{\boldsymbol{E}} \in \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$.

– Soient u et v deux éléments de $F \cap G$. En particulier, u et v sont :
  – deux éléments du sous-espace vectoriel F, donc $u + v \in F$,
  – deux éléments du sous-espace vectoriel G, donc $u + v \in G$.

  On en déduit donc que $u + v \in F \cap G$. Donc $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ **est stable pour l'addition.**

– Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  – $u \in F$ et F est stable pour la multiplication externe par les réels (puisque F est un sous-espace vectoriel de E) donc le vecteur λu appartient à F.
  – $u \in G$ et G est stable pour la multiplication externe donc $\lambda u \in G$.

  Donc $\lambda u \in F \cap G$. Donc $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ **est stable pour la multiplication externe**.

On en déduit donc que $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\boldsymbol{E}$.

3. Avec les notations de la question 1, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ du système

$$\begin{cases} 2x - y + 6z = 0 \\ x - y - 3z = 0, \end{cases}$$

est exactement l'ensemble $F_1 \cap F_2$. D'après la question 1, F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\big(\mathbb{R}^3, +, \cdot\big)$. On déduit donc de la question 2 que leur intersection $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\big(\mathbb{R}^3, +, \cdot\big)$.

Exercice 2 : Intégrales.

1. a.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + o(x) \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} &= x + o(x) \\ \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} &= 1 + o(1) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle y admet une primitive F qui est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $G(x) = F(2x) - F(x)$, on en déduit que G est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x > 0$, $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2x} - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}$.

c. $G'(0) = 2F'(0) - F'(0) = f(0) = 1$.

2. **a.** Soit x un réel strictement positif, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in [x, 2x]$, on a :

$$\begin{array}{ccccc} -2x & \leqslant & -t & \leqslant & -x \\ \mathrm{e}^{-2x} & \leqslant & \mathrm{e}^{-t} & \leqslant & \mathrm{e}^{-x} \\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \leqslant & 1-\mathrm{e}^{-t} & \leqslant & 1-\mathrm{e}^{-x} \\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{t} & \leqslant & \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} & \leqslant & \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{t} \end{array}$$

b. En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[x, 2x]$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{t}\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{t}\,\mathrm{d}t \\ (1-\mathrm{e}^{-x})\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t & \leqslant & (1-\mathrm{e}^{-2x})\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ (1-\mathrm{e}^{-x})\,[\ln|t|]_x^{2x} & \leqslant & G(x) & \leqslant & (1-\mathrm{e}^{-2x})\,[\ln|t|]_x^{2x} \end{array}$$

Comme $\ln(2x) - \ln x = \ln 2$, on obtient l'inégalité demandée :

$$(1-\mathrm{e}^{-x})\ln 2 \leqslant G(x) \leqslant (1-\mathrm{e}^{-2x})\ln 2$$

c. Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, le théorème des gendarmes montre que

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \ln 2.$$

3. D'après la question **1. b.**, $G'(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} > 0$, on peut tracer le tableau de variations de G :

x	0	$+\infty$
$G'(x)$	$+$	
$G(x)$	0	$\ln 2$

Comme G est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[0, \ln 2[$.

4. G est bijective et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc en tout point x pour lequel $G'(x) \neq 0$, sa réciproque G^{-1} est dérivable en $G(x)$. Comme $G'(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, G^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition. Ainsi, $K = [0, \ln 2[$.

Exercice 3 : Développements limités.

1. **a.** On sait que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$

b. La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1\,,+\infty[$ et sa dérivée admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné ci-dessus.

Donc $x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 donné par :

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

2. **a.** On rappelle que $\ln(1+x) \underset{(x\to 0)}{\sim} x$. D'où $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 1 = f(0)$

ce qui prouve que f est continue en zéro.

b. En utilisant 1(b), on obtient directement :

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)} \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

égalité encore valable en $x = 0$.

c. Puisque f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$, elle admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0. De plus f est définie en 0.

Donc f **est dérivable en 0** et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

d. La tangente (T) au point $A\,(0\,,\,1)$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f, admet pour équation réduite : $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$.

La position locale au voisinage de A, de $\mathcal{C}$ par rapport à (T), est donnée par le signe de la différence :

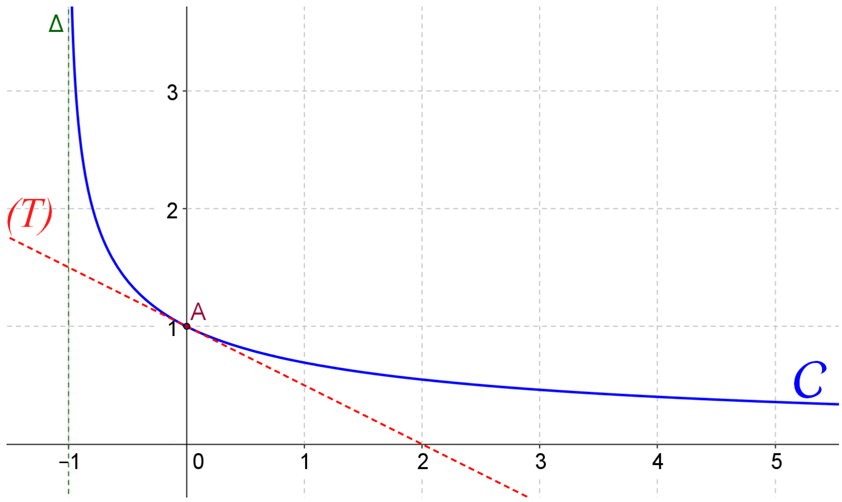
$$\begin{aligned} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) &= \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x) \\ &= x^2\left(\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)\right) \end{aligned}$$

Or $\forall\, x \in I,\ x^2 \geqslant 0$ et pour tout réel x voisin de 0, $\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)$ est proche de $\frac{1}{3} > 0$.

Donc pour tout réel x voisin de 0, $x^2\left(\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)\right) \geqslant 0$.

Ainsi $\exists\, r > 0\ ;\ \forall\, x \in I \cap]-r, r[\,,\ f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + 1$.

Localement, la courbe $\mathcal{C}$ est située **au dessus de sa tangente** (T) au voisinage de A.



3. **a.** On sait que $f(x) - f(0) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$
et que $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + u^2\,\varepsilon_3(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon_3(u) = 0$
Donc la fonction composée $x \longmapsto \exp\left(f(x) - f(0)\right)$ admet aussi un développement limité à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{array}{c|c} u & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \\ \hline u^2 & \frac{1}{4}x^2 \end{array}$$

Ainsi
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{f(x)-f(0)} &= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2\right) + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{1}{4}x^2\right) + x^2\varepsilon_4(x) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{11}{24}x^2 + x^2\varepsilon_4(x) \end{aligned}$$
avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$.

b. Pour tout réel $x \in I \setminus \{0\}$,

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{f(0)}\,\mathrm{e}^{f(x)-f(0)} = \mathrm{e} \times \exp\left(f(x) - f(0)\right)$$

On en déduit $\boxed{g(x) = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}\,x + \dfrac{11\mathrm{e}}{24}\,x^2 + x^2\,\varepsilon_5(x)}$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0$