1 Les essentiels

1 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right),\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \arctan(1),\quad \arcsin(0).$$

2 Calculer :

$$\arccos(0),\quad \arccos(-1),\quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \arctan\left(\sqrt{3}\right),\quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

3 Soit $x \in [-1,1]$.

1. Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)),\qquad \cos(2\arcsin(x)).$$

2. Démontrer que :

(a) $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

4 Démontrer la formule suivante : $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

5 Démontrer que pour tout réel x positif, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$.

6 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f\ :\ x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),\qquad g\ :\ x \mapsto \arcsin x.$$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
3. En déduire une relation entre f et g.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

2 Pour travailler seul

9 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

10 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0,1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1,0]$.

1 Les essentiels

11 Déterminer les solutions des systèmes ci-dessous :

1. $\begin{cases} 3y - z + t = 4 \\ -x + y + z + t = 0 \\ -y - 2z + t = -4 \\ -x + 2y + z + t = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x + y + 8z = -2 \\ 3x - 2y - 12z = 7 \\ -2x + y + 8z = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2y - 6z + 8t = 6 \\ -x - y - 5z + 7t = 7 \\ -x - 3y - 11z + 15t = 13 \\ -x - 2y - 8z + 11t = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 2z - 4t = 4 \\ -3x + 2y + z + 4t = -12 \\ 3x - 3y - 3z - 3t = 15 \\ -x - y - 3z + 3t = 1. \end{cases}$

12 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ d'équations respectives :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &: 3y + 3z = -12 \\ \mathscr{P}_2 &: -x + 3y + 6z = -15 \\ \mathscr{P}_3 &: 2x + 2y - 4z = -2. \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.

13 Soit m un paramètre réel.

1. Échelonner le système (S) d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + my + m^2 z = 1 \\ m^2 x + y + mz = 0 \\ mx + m^2 y + z = 0. \end{cases}$$

2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le système (S) admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de m.
3. Résoudre (S) pour les autres valeurs de m.

14 Effectuer, lorsque cela est possible, les calculs matriciels suivants :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits QP et PDQ.
2. En déduire une méthode simple pour calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16 Déterminer la transposée de chacune des matrices ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

17 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

18 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = A - aI_3$, où a et b sont deux réels fixés non nuls.

1. Expliciter les coefficients de la matrice B.

2. Calculer B^2 et B^3, puis B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

19 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Pour approfondir

20 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$ et toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, on pose :

$$P(M) = a_n M^n + \cdots a_2 M^2 + a_1 M + a_0 I_2.$$

On admet alors le résultat suivant : *Théorème. Pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, et tout nombre réel λ,*

(i) $P(M) \in M_2(\mathbb{R})$,

(ii) $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$,

(iii) $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$.

Déduire alors de la question précédente l'expression de la matrice A^n en précisant ses coefficients.

4. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

Écrire la relation de récurrence précédente sous forme matricielle et en déduire l'expression de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$ en fonction de u_0, v_0 et n.

21 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit le nombre réel $\det(A) = ad - bc$, appelé le **déterminant** de la matrice A.

1. On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB.
2. (a) En déduire que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.
   (b) En utilisant la question 1, démontrer que si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.
3. Quel résultat a-t-on démontré ?

3 Pour travailler seul

22 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_4$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

23 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

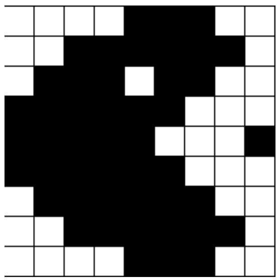
1. Expliciter les coefficients de la matrice B.
2. Calculer B^2 et B^3, puis B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

25 *Initiation au traitement d'images.* On considère la matrice M de $M_9(\mathbb{R})$ formée de 0 et de 1 représentant l'image ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Dans cet exercice, pour transformer une matrice en une image, on utilise le code couleur suivant :

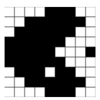
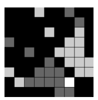
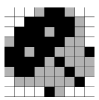
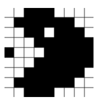
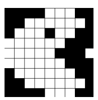
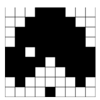
$0 :$ ■ $\quad 1 :$ □ $\quad \frac{1}{2} :$ ■ $\quad -\frac{1}{2} :$ ■.

On définit les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1} \\ 0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0 \\ 0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0 \\ 0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0 \\ 0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0 \\ 0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0 \\ \mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Associer chaque calcul matriciel ci-dessous à l'image correspondante.

1. ${}^tM$
2. $A \times M$
3. $M \times A$
4. $U - M$
5. $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$
6. $\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$

a)  b)  c)  d)  e)  f) 

26 *Les systèmes linéaires en chimie.* Utiliser la résolution d'un système linéaire adéquat pour équilibrer la réaction chimique ci-dessous entre l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ et l'acide sulfurique H_2SO_4 :

$$Al(OH)_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2O.$$