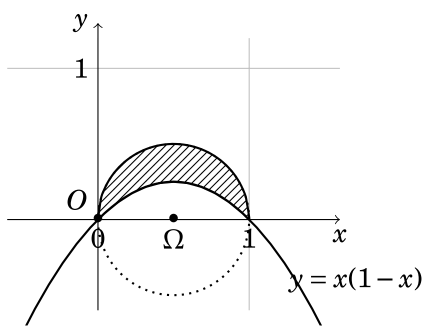
1 Les essentiels

27 Pour chacune des fonctions ci-dessous, représenter graphiquement f dans un repère orhonormal du plan, puis en déduire par un calcul d'aire la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{2}$
2. $f : x \mapsto |1-2x|$
3. $f : x \mapsto x - 2\lfloor x \rfloor$.

28 On considère le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer l'aire de la surface située sous la parabole d'équation $y = x(1-x)$ et au dessus de l'axe des abscisses $\left(O;\vec{i}\right)$.
2. On considère le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Déterminer l'équation du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire hachurée.



29 Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous en précisant leurs ensembles de définition :

1. $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$
2. $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
5. $x \mapsto \tan(x)$
6. $t \mapsto \sqrt{t}$.

30 Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(t)\mathrm{d}t, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t, \quad J_2 = \int_0^{\pi} \cos^4(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t, \quad J_3 = \int_0^{2\pi} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x.$$

31 Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

1. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t,$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(x)\mathrm{d}x,$
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t,$
4. $L = \displaystyle\int_0^1 (t^2-t+2)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

32 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

1. $I = \displaystyle\int_2^{5/2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\mathrm{d}x,$ en posant $x = 2+\sin(t)$,
2. $J = \displaystyle\int_1^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,$ en posant $t = \mathrm{e}^x$,
3. $K = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x,$ en posant $u = \sqrt{x}$,
4. $L = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+3}}\mathrm{d}t,$ en posant $u = \dfrac{t-1}{2}$,
5. pour $a \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $M = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{a^2+t^2}\mathrm{d}t,$ en posant $u = \dfrac{t}{a}$,
6. $N = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2(x)},$ en posant $u = \tan x$.

33

1. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall u \in]-1;1[, \quad \frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}.$$
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{2}t - 1$, déterminer les primitives de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{4t-t^2}$ sur $]0;4[$.

34 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous sont dérivables et exprimer leur dérivée :

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t, \qquad h(x) = \int_0^x x f(t)\mathrm{d}t, \qquad \varphi(x) = x^2 \int_{-x}^{x} x f(t)\mathrm{d}t.$$

35 Déterminer, en utilisant les sommes de Riemann, les limites des suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}.$$

Indication : pour finaliser le calcul de la limite de U_n, on pourra déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{1+x^2} = a + \dfrac{b}{1+x^2}$.

2 Pour approfondir

36 On considère la fonction $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t & \text{si } x>0, \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x=0. \end{cases}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et expliciter f'.
2. (a) Démontrer que pour $x>0$ et $t \in [0;x]$: $\dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+1} \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{e}^t+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$.

   (b) En déduire : $\forall x>0$, $\dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{3}$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?

37 *Médian 2014.* Soit a un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 en fonction de a.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0,a]$: $0 \leqslant \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$.

   (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k = I_{k-1} - \dfrac{a^k}{k!}\mathrm{e}^{-a}$.
4. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = I_0 - \mathrm{e}^{-a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}$.
5. En déduire finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$.

3 Pour travailler seul

38 Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1+(\cos(t))^2}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{t}{2-t^2}\mathrm{d}t$.

39 Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$, en posant le changement de variable $x = \sin^2(\theta)$, puis en déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

40 En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$, puis en déduire un équivalent simple de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

41 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer f' sur $]0;+\infty[$.

   (b) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et déterminer f' sur $]-\infty;0[$.

   (c) En déduire que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Lorsque $x>0$, donner un encadrement de e^t pour $t \in [x,2x]$. En déduire l'encadrement : $\forall x>0$, $\ln(2)\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\mathrm{e}^{2x}$.

   (b) Démontrer de même : $\forall x<0$, $\ln(2)\mathrm{e}^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\mathrm{e}^x$.
3. Prolonger f par continuité en 0.

1 Sous-espaces vectoriels

42 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y=0\right\}$,
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy=1\right\}$,
3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+3z-1=0\right\}$,
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+3z=0\right\}$.

43 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Justifier.

1. $F_1 = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(0)=1\right\}$,
2. $F_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ;\ P(1)=P(2)\right\}$,
3. $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
4. $F_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geqslant 0\right\}$.

44 L'ensemble $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 - 2u_1 = 0\right\}$ est-il un espace vectoriel ?

45 L'ensemble $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0)+P'(X)=0\right\}$ est-il un espace vectoriel ?

2 Familles libres, familles génératrices, bases

46 Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathscr{F}_1 = \big((1,1),(1,0)\big), \qquad \mathscr{F}_2 = \big((1,1),(2,2)\big), \qquad \mathscr{F}_3 = \big((1,0)\big).$$

47 Considérons, dans $\mathbb{R}_2[X]$, les polynômes :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X+1, \quad Q_3 = X^2+2X.$$

1. Soit $P = X^2+1$. A-t-on $P \in \mathrm{Vect}(Q_1,Q_2,Q_3)$?
2. La famille (Q_1,Q_2,Q_3) est-elle libre ?

48 Justifier que l'ensemble F ci-dessous est un espace vectoriel et déterminer une base de F :

$$F = \left\{M(a,b) = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+b \\ a-b & a+5b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

49 Justifier que l'ensemble $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y-2z=0\right\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

50 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = \sin(x) \\ h(x) = x. \end{cases}$$

La famille (f,g,h) est-elle libre ?

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

51 Soient $F = \mathrm{Vect}\big((1,2,3)\big)$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-y=z\right\}$. Déterminer une famille génératrice de $F+G$.

52 Soient $P = 1+X^2$ et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par P.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$. Appliquer le théorème de la division euclidienne pour la division euclidienne du polynôme A par le polynôme P.
   (b) En déduire que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. En déduire un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}[X]$ tel que F et G soient supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Dimension

53 On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'une base (e_1, e_2, e_3). On définit $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, où

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathscr{F}$.

54 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $\big((1,1),(3,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. $\big((1,0,2),(1,2,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

55 Les familles ci-dessous de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathscr{B}_1 = \big((1,1),(1,2)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = \big((1,0),(2,-1),(3,3)\big).$$

56
1. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1,2,-1,1)$ et $\vec{v} = (2,3,0,-1)$ de $\mathbb{R}^4$. Calculer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v})$.
2. Calculer le rang de la famille $\big(P, Q, R\big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$P = 1 + X - X^2, \quad Q = -X + 3X^2, \quad R = 2 + X - X^2.$$

57 On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$, où

$$\begin{cases} a = (1,2,3,4) \\ b = (1,1,1,3) \\ c = (2,1,1,1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = (-1,0,-1,2) \\ y = (2,3,0,1). \end{cases}$$

Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$. La somme $F+G$ est-elle directe ?

58 On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = 0\Big\}, \quad G = \text{Vect}\big(1 + X, X + X^2, X^2 + X^3\big).$$

1. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.
2. Donner une base de $F \cap G$.

59 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)$, $u_4 = (-1,0,2)$ et $u_5 = (-1,2,4)$ ainsi que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ci-après :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_4, u_5).$$

1. Déterminer la dimension de chacun des espaces F et G.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

5 Pour approfondir

60 On considère le système linéaire (S) ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + 2z - 3t = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + y + 4z - 5t = 0. \end{cases}$$

1. (a) Résoudre (S).
   (b) En déduire que l'ensemble F formé par les solutions du système (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une base.
2. Justifier que l'ensemble $G = \Big\{(a-b, 0, a, 3a+b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
3. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

61 On considère les sous-ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ de $M_n(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathscr{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}, \quad \mathscr{A} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}.$$

1. Démontrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

62 On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{O}_3$ la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$. Pour toute matrice A de $M_3(\mathbb{R})$, on définit les ensembles suivants :

$$F_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ AM = M\}$$
$$F_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ A^2M = AM\}.$$

1. Soit$A \in M_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $F_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $F_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Démontrer que : $\forall A \in M_3(\mathbb{R}),\ F_1(A) \subset F_2(A)$.
   (b) Démontrer que si A est inversible, alors $F_1(A) \subset F_2(A)$.
3. (a) Démontrer que si $A - I$ est inversible, alors $F_1(A) = \{\mathbb{O}_3\}$.
   (b) Application : déterminer $F_1(A)$ et $F_2(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Dans cette question, on cconsidère la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que pour $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, on a :
   $$M \in F_1(D) \iff a = b = c = g = h = i = 0.$$
   (b) En déduire une base de $F_1(D)$.

6 Pour travailler seul

63 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Démontrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

64 Les vecteurs $u = (-2,0,1,-2)$, $v = (0,-3,-1,-1)$ et $w = (0,1,0,3)$ de $\mathbb{R}^4$ forment-ils une famille libre ? Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

65 1. Démontrer que les vecteurs I, J, K, L de $M_2(\mathbb{R})$ définis ci-dessous sont linéairement indépendants :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer que toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

66 Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Démontrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

67 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_2 = (1,2,3,4)$ et $v_3 = (2,3,4,5)$.

68 Démontrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, engendré par 3 matrices que l'on précisera.

69 On note $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et et on considère les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \qquad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j},$$

où θ est un nombre réel fixé tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.
3. Soit $m = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées du vecteur m dans la base $\mathscr{B}'$, puis expliciter la matrice $R \in M_2(\mathbb{R})$ telle que : $m_{\mathscr{B}'} = R m_{\mathscr{B}}$.