1 Les essentiels

1 Calculer :

1. $\arccos(0)$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$.
2. $\arctan(1)$, $\arccos(1)$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2 Soit $x \in [-1,1]$.

1. Démontrer que :

   (a) $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \qquad \cos(2\arcsin(x)).$$

3 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right). \end{array}$$

1. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que f est dérivable. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1,0[$.
3. À l'aide des questions précédentes, démontrer que :

$$\forall x \in]-1,0[, \quad \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(x).$$

4 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5 *Final MT1 Automne 2022.*

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

   En appliquant le théorème des accroissements finis, démontrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

2. (a) Déterminer la limite de f en zéro.
   (b) On admet que f est dérivable sur $I =]0,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   (c) En déduire que f est bijective de I sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en zéro.
   On notera encore f la fonction prolongée à l'intervalle fermé $[0,+\infty[$.
   Que vaut $f(0)$?

6

1. Démontrer que : $\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

2 Pour travailler seul

7 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1 Les essentiels

8 Déterminer les solutions des systèmes ci-dessous :

1. $\begin{cases} 3y-z+t=4 \\ -x+y+z+t=0 \\ -y-2z+t=-4 \\ -x+2y+z+t=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x+y+8z=-2 \\ 3x-2y-12z=7 \\ -2x+y+8z=-3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2y-6z+8t=6 \\ -x-y-5z+7t=7 \\ -x-3y-11z+15t=13 \\ -x-2y-8z+11t=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+2z-4t=4 \\ -3x+2y+z+4t=-12 \\ 3x-3y-3z-3t=15 \\ -x-y-3z+3t=1. \end{cases}$

9 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ d'équations respectives :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &: 3y+3z=-12 \\ \mathscr{P}_2 &: -x+3y+6z=-15 \\ \mathscr{P}_3 &: 2x+2y-4z=-2. \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.

10 Soit m un paramètre réel.

1. Échelonner le système (S) d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$(S)\begin{cases} x+my+m^2z=1 \\ m^2x+y+mz=0 \\ mx+m^2y+z=0. \end{cases}$$

2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le système (S) admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de m.
3. Résoudre (S) pour les autres valeurs de m.

11 Effectuer, lorsque cela est possible, les calculs matriciels suivants :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

12 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice ligne L telle que $A=CL$.
2. Calculer LC. En déduire une expression simple de A^n en fonction de A pour tout $n\in\mathbb{N}$.

13 Vrai ou faux ? La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

14 On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits QP et PDQ.
2. En déduire une méthode simple pour calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

15 Déterminer la transposée de chacune des matrices ci-dessous.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

16 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

17 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = A - aI_3$, où a et b sont deux réels fixés non nuls.

1. Expliciter les coefficients de la matrice B.
2. Calculer B^2 et B^3, puis B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Pour approfondir

19 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Pour tout polynôme $P = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$ et toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, on pose :
$$P(M) = a_nM^n + \cdots a_2M^2 + a_1M + a_0I_2.$$
On admet alors le résultat suivant : *Théorème. Pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, et tout nombre réel λ,*
   (i) $P(M) \in M_2(\mathbb{R})$,
   (ii) $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$,
   (iii) $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$.
Déduire alors de la question précédente l'expression de la matrice A^n en précisant ses coefficients.
4. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$
Écrire la relation de récurrence précédente sous forme matricielle et en déduire l'expression de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$ en fonction de u_0, v_0 et n.

20 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit le nombre réel $\det(A) = ad - bc$, appelé le **déterminant** de la matrice A.

1. On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB.
2. (a) En déduire que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.
   (b) En utilisant la question 1, démontrer que si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.
3. Quel résultat a-t-on démontré ?

21 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie l'égalité ${}^tM = -M$.

1. (a) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est-elle symétrique ? Justifier.
   (b) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ est-elle antisymétrique ? Jusitifier.
2. Démontrer, en raisonnant par analyse-synthèse, que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3 Pour travailler seul

22 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système (S) ci-dessous d'inconnue (a,b,c,d) et expliciter l'ensemble E formé par les solutions de ce système.

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2a & - & b & & & + & 5d & = & 0 \\ -3a & + & b & - & c & - & 8d & = & -2 \\ a & & & + & c & + & 3d & = & 1. \end{array}\right.$$

23 Vrai ou faux ? $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

24 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_4$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

25 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

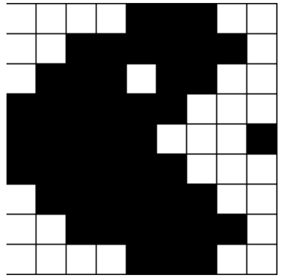
1. Expliciter les coefficients de la matrice B.
2. Calculer B^2 et B^3, puis B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

27 *Initiation au traitement d'images.* On considère la matrice M de $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ formée de 0 et de 1 représentant l'image ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Dans cet exercice, pour transformer une matrice en une image, on utilise le code couleur suivant :

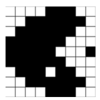
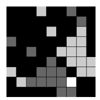
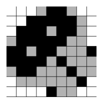
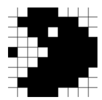
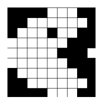
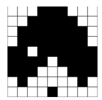
$0 :$ ■ $\qquad 1 :$ □ $\qquad \dfrac{1}{2} :$ ▒ $\qquad -\dfrac{1}{2} :$ ▓.

On définit les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associer chaque calcul matriciel ci-dessous à l'image correspondante.

1. ${}^tM$
2. $A \times M$
3. $M \times A$
4. $U - M$
5. $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$
6. $\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$

a)  b)  c)  d)  e)  f) 

28 *Les systèmes linéaires en chimie.* Utiliser la résolution d'un système linéaire adéquat pour équilibrer la réaction chimique ci-dessous entre l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ et l'acide sulfurique H_2SO_4 :

$$Al(OH)_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2O.$$

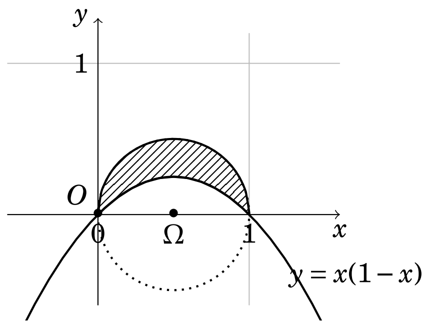
1 Les essentiels

29 Pour chacune des fonctions ci-dessous, représenter graphiquement f dans un repère orhonormal du plan, puis en déduire par un calcul d'aire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

1. $f \,:\, x \mapsto \dfrac{1-x}{2}$
2. $f \,:\, x \mapsto |1-2x|$
3. $f \,:\, x \mapsto x - 2\lfloor x \rfloor$.

30 On considère le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer l'aire de la surface située sous la parabole d'équation $y = x(1-x)$ et au dessus de l'axe des abscisses $\left(O;\vec{i}\right)$.
2. On considère le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Déterminer l'équation du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire hachurée.



31 Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous en précisant leurs ensembles de définition :

1. $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$
2. $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
5. $x \mapsto \tan(x)$
6. $t \mapsto \sqrt{t}$.

32 Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(t)\mathrm{d}t, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t, \quad J_2 = \int_0^{\pi} \cos^4(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t, \quad J_3 = \int_0^{2\pi} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x.$$

33 Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

1. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$,
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(x)\mathrm{d}x$,
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t$,
4. $L = \displaystyle\int_0^1 (t^2 - t + 2)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

34 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

1. $H = \displaystyle\int_2^{5/2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\mathrm{d}x$, en posant $x = 2 + \sin(t)$,
2. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}$, en posant $u = \tan x$,
3. $J = \displaystyle\int_1^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, en posant $t = \mathrm{e}^x$,
4. $K = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$, en posant $u = \sqrt{x}$,
5. $L = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+3}}\mathrm{d}t$, en posant $u = \dfrac{t-1}{2}$.

35
1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction arcsin sur $]-1,1[$.
2. Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}^*$, les primitives de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{a^2+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ grâce au changement de variable $u = \dfrac{t}{a}$.

36
1. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall u \in]-1;1[, \ \frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}.$$
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{2}t - 1$, déterminer les primitives de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{4t-t^2}$ sur $]0;4[$.

37 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ci-dessous sont dérivables et exprimer leur dérivée :

$$g(x)=\int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t,\qquad h(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t,\qquad \varphi(x)=x^2\int_{-x}^{x} xf(t)\mathrm{d}t.$$

38 Déterminer, en utilisant les sommes de Riemann, les limites des suites définies par, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n=\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2},\qquad T_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k},\qquad U_n=\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^3+nk^2},\qquad V_n=n\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{e}^{-\frac{n}{k}}}{k^2}.$$

Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$, *déterminer* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *tel que :* $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^2}{1+x^2}=a+\frac{b}{1+x^2}$.

2 Pour approfondir

39 On considère la fonction $f:[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0)=\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad\forall x>0,\quad f(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x\frac{t}{2\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et expliciter f'.
2. (a) Démontrer que pour $x>0$ et $t\in[0;x]$: $\dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+1}\leqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}^t+1}\leqslant\dfrac{1}{3}$.
   (b) En déduire : $\forall x>0,\quad \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{3}$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?

40 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Calculer I_0.
   (b) Calculer I_1.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On rappelle que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \cos^n(t)=\cos(t)\times\cos^{n-1}(t).$$

   (a) En utilisant cette relation et une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-2} et de I_n.

41 *Final 2024.* Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On pose $a_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. En particulier $a_0=\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Justifier que $\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant t^n\,\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^n$.
   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Calculer a_0.
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que

$$a_{n+1}=-\mathrm{e}^{-1}+(n+1)a_n$$

   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n et de a_{n+1} .
   (d) Proposer un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

42 *Médian 2014.* Soit a un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^a\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 en fonction de a.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0,a]$: $0\leqslant\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\leqslant\dfrac{x^n}{n!}$.
   (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k=I_{k-1}-\dfrac{a^k}{k!}\mathrm{e}^{-a}$.
4. Déduire de ce qui précède que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=I_0-\mathrm{e}^{-a}\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{a^k}{k!}$.
5. En déduire finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}$.

43 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt.$$

1. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$
3. En déduire, par récurrence, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + I_n.$$

44 Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q\,dx.$$

1. Démontrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,
$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.$$
2. Démontrer, en raisonnant par récurrence sur l'entier q, que la propriété
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q)!} I_{p+q,0}$$
est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $I_{p,0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $I_{p,q}$ pout tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

45 À l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2n+1}\,d\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

3 Pour travailler seul

46 Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1+(\cos(t))^2}dt$ et $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{t}{2-t^2}dt$.

47 Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$, en posant le changement de variable $x = \sin^2(\theta)$, puis en déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

48 En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$, puis en déduire un équivalent simple de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

49 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt.$$

1. (a) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer f' sur $]0;+\infty[$.
   (b) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et déterminer f' sur $]-\infty;0[$.
   (c) En déduire que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Lorsque $x > 0$, donner un encadrement de e^t pour $t \in [x,2x]$. En déduire l'encadrement :
$$\forall x > 0,\ \ln(2)e^x \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)e^{2x}.$$
   (b) Démontrer de même :
$$\forall x < 0,\ \ln(2)e^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)e^x.$$
3. Prolonger f par continuité en 0.

1 Sous-espaces vectoriels

50 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y=0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy=1\right\}$
3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+3z-1=0\right\}$
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+3z=0\right\}$.

51 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Justifier.

1. $F_1 = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(0)=1\right\}$
2. $F_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ;\ P(1)=P(2)\right\}$
3. $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $F_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geqslant 0\right\}$.

52 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier.

1. L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
2. L'ensemble des fonctions qui s'annulent en 2.
3. L'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$.

53 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ? Justifier.

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites qui convergent vers 0.
3. L'ensemble $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - nu_n\}$.

54 L'ensemble $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 - 2u_1 = 0\right\}$ est-il un espace vectoriel ?

55 L'ensemble $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) + P'(X) = 0\right\}$ est-il un espace vectoriel ?

2 Familles libres, familles génératrices, bases

56 Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs V, U_1, U_2 et U_3 de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs du paramètre m telles que $V \in \mathrm{Vect}(U_1,U_2,U_3)$.

57 Considérons, dans $\mathbb{R}_2[X]$, les polynômes :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X+1, \quad Q_3 = X^2 + 2X.$$

1. Soit $P = X^2 + 1$. A-t-on $P \in \mathrm{Vect}(Q_1,Q_2,Q_3)$?
2. La famille (Q_1,Q_2,Q_3) est-elle libre ?

58 La famille $\big((0,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(5,4,1,3)\big)$ est-elle libre ?

59 On considère les vecteurs $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n, \quad v_n = 3^n \quad \text{et} \quad w_n = 4^n.$$

La famille (u,v,w) est-elle libre ?

60 On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$P_1(X) = 1 - iX, \quad P_2(X) = 1 + X^2 \quad \text{et} \quad P_3(X) = iX - X^3.$$

1. La famille (P_1,P_2,P_3) est-elle libre ?
2. Est-elle génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$?

61 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad h(x) = x.$$

La famille (f,g,h) est-elle libre ?

62 On considère les fonctions f_0, f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2.$$

1. La famille (f_0, f_1, f_2) est-elle une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
2. On note E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, de degré au plus 2.
   (a) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer une base de E.

63 Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathscr{F}_1 = \big((1,1),(1,0)\big), \qquad \mathscr{F}_2 = \big((1,1),(2,2)\big), \qquad \mathscr{F}_3 = \big((1,0)\big).$$

64 Justifier que l'ensemble F ci-dessous est un espace vectoriel et déterminer une base de F :

$$F = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+b \\ a-b & a+5b \end{pmatrix}, \, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

65 Justifier que l'ensemble $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \; x + 3y - 2z = 0 \right\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

66 Soient $F = \text{Vect}\big((1,2,3)\big)$ et $G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \; 2x - y = z \right\}$.

1. Déterminer une famille génératrice de $F + G$.
2. Cette famille est-elle une base de $F + G$? Que peut-on en déduire ?

67 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose :

$$F = \text{Vect}(X-1, X) \qquad \text{et} \qquad G = \{P \in E, \; P(0) = P(1) = 0\}.$$

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

68 Soient $P = 1 + X^2$ et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par P.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$. Appliquer le théorème de la division euclidienne pour la division euclidienne du polynôme A par le polynôme P.
   (b) En déduire que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. En déduire un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}[X]$ tel que F et G soient supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

69 Soient $m \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$. On pose :

$$F_m = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \; x - 2y + z = m \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(e_1).$$

1. Déterminer les valeurs de m telles que F_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que pour ces valeurs de m, on a : $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$.

4 Dimension

70 On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'une base (e_1, e_2, e_3). On définit $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, où :

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur e_1 dans la base $\mathscr{F}$.

71
1. La famille $\big((1,1),(3,1)\big)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?
2. La famille $\big((1,0,2),(1,2,1)\big)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

72 Les familles ci-dessous de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathscr{B}_1 = \big((1,1),(1,2)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = \big((1,0),(2,-1),(3,3)\big).$$

73
1. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1,2,-1,1)$ et $\vec{v} = (2,3,0,-1)$ de $\mathbb{R}^4$. Calculer le rang de la famille $(\vec{u},\vec{v})$.
2. Calculer le rang de la famille $\big(P,Q,R\big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$P = 1 + X - X^2, \quad Q = -X + 3X^2, \quad R = 2 + X - X^2.$$

74 On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $F = \text{Vect}(a,b,c)$ et $G = \text{Vect}(x,y)$, où

$$\begin{cases} a = (1,2,3,4) \\ b = (1,1,1,3) \\ c = (2,1,1,1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = (-1,0,-1,2) \\ y = (2,3,0,1). \end{cases}$$

Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$. La somme $F+G$ est-elle directe ?

75 On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = 0\Big\}, \quad G = \text{Vect}\big(1+X, X+X^2, X^2+X^3\big).$$

1. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.
2. Donner une base de $F \cap G$.

76 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)$, $u_4 = (-1,0,2)$ et $u_5 = (-1,2,4)$ ainsi que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ci-après :

$$F = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_4,u_5).$$

1. Déterminer la dimension de chacun des espaces F et G.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

77 On considère les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :

$$F = \text{Vect}\big(X^2 - X, X^2 + 1\big) \quad \text{et} \quad G = \Big\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(-1) = P'(-1) = 0\Big\}.$$

1. Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée à cette somme directe.
2. Écrire le vecteur $4X^2 - 4X + 2$ dans cette base.

5 Pour approfondir

78 On considère le système linéaire (S) ci-dessous :

$$(S)\ \begin{cases} x + 2z - 3t = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + y + 4z - 5t = 0. \end{cases}$$

1. (a) Résoudre (S).
   (b) En déduire que l'ensemble F formé par les solutions du système (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une base.
2. Justifier que l'ensemble $G = \Big\{(a-b, 0, a, 3a+b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
3. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

79 On considère les sous-ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ de $M_n(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathscr{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}, \quad \mathscr{A} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}.$$

1. Démontrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

80 On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{O}_3$ la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$. Pour toute matrice A de $M_3(\mathbb{R})$, on définit les ensembles suivants :

$$F_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ AM = M\}$$
$$F_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}),\ A^2M = AM\}.$$

1. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $F_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $F_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Démontrer que : $\forall A \in M_3(\mathbb{R}),\ F_1(A) \subset F_2(A)$.
   (b) Démontrer que si A est inversible, alors $F_2(A) \subset F_1(A)$.
3. (a) Démontrer que si $A - I$ est inversible, alors $F_1(A) = \{\mathbb{O}_3\}$.
   (b) Application : déterminer $F_1(A)$ et $F_2(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Dans cette question, on considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que pour $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, on a :
   $$M \in F_1(D) \iff a = b = c = g = h = i = 0.$$
   (b) En déduire une base de $F_1(D)$.

6 Pour travailler seul

81 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Démontrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

82 Les vecteurs $u = (-2,0,1,-2)$, $v = (0,-3,-1,-1)$ et $w = (0,1,0,3)$ de $\mathbb{R}^4$ forment-ils une famille libre? Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

83
1. Démontrer que les vecteurs I, J, K, L de $M_2(\mathbb{R})$ définis ci-dessous sont linéairement indépendants :
   $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Démontrer que toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

84 Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Démontrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

85 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_2 = (1,2,3,4)$ et $v_3 = (2,3,4,5)$.

86 Démontrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, engendré par 3 matrices que l'on précisera.

87 On note $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et et on considère les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \qquad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j},$$

où θ est un nombre réel fixé tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.
3. Soit $m = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées du vecteur m dans la base $\mathscr{B}'$, puis expliciter la matrice $R \in M_2(\mathbb{R})$ telle que : $m_{\mathscr{B}'} = R\, m_{\mathscr{B}}$.

1 Pour s'entraîner : calculs de développements limités

88 Déterminer le développement limité :

1. à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + e^x - \cos(x)$
2. à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+x}$
3. à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$
4. à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \sin\left(2x^2\right)$
5. à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$
6. à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{3+\cos(x)}$
7. à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$

89

1. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \exp(x)$ à l'ordre 3 en 2.
2. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \ln x$ à l'ordre 2 en 3.
3. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 en $\pi/2$.
4. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4.

90 Déterminer le développement limité de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.

91 En se rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois jusqu'à obtenir le $DL_5(0)$ de tan.

2 Étude locale des fonctions en un point

92 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan(x)}{(\sin(x))^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(e^x - e^{\frac{x}{x+1}}\right)$

93 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x^4}$. Calculer $\varphi^{(5)}(0)$.

94 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

95 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\cos(x) - e^x}{x} \end{array}$$

1. Démontrer que f admet une limite en 0. On notera encore f le *prolongement par continuité de f*.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en 0.
3. Quelles sont les positions relatives de T et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0 ?

96 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]-1;0[\cup]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1. Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f le prolongement par continuité de f à $]-1;+\infty[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 et préciser la position relative locale, au voisinage de l'origine, de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

97

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}.$$

2. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f le prolongement par continuité de f en 0. Que vaut $f(0)$?
3. Justifier que la fonction f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f, puis déterminer la position relative au voisinage de 0 de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

98 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2} \end{array}$$

1. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative, au voisinage de 0, de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

99

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.
2. On note encore f ce prolongement par continuité. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

3 Étude locale des fonctions en l'infini

100 Soit f la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

Démontrer l'existence d'une asymptote (D) en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f et déterminer son équation, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

101 Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right). \end{array}$$

Démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote (D) en $+\infty$. Déterminer l'équation de (D) et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

102 Étudier l'existence d'une asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie ci-dessous et préciser la position relative au voisinage de $+\infty$ de $\mathscr{C}$ par rapport à cette éventuelle asymptote.

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x^2(x-2)}. \end{array}$$

103 Étudier l'existence d'une asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie ci-dessous et préciser la position relative au voisinage de $-\infty$ de $\mathscr{C}$ par rapport à cette éventuelle asymptote.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right). \end{array}$$

4 Pour travailler seul

104 Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 et en 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$.

105 Étudier l'existence d'une asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie ci-dessous et préciser la position relative au voisinage de $+\infty$ de $\mathscr{C}$ par rapport à cette éventuelle asymptote.

$$f : \begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{x+1}. \end{array}$$

106 On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{7}x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point Ω d'abscisse 0.

Cocher la seule réponse exacte sans justification.

- ☐ Au voisinage à gauche de Ω, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
- ☐ Au voisinage de Ω, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
- ☐ Au voisinage à droite de Ω, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
- ☐ Au voisinage de Ω, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T.
- ☐ On ne peut pas répondre sans information supplémentaire.

107 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ.
2. En déduire la limite ℓ de φ en 0.
3. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) au voisinage de 0.

4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

   (a) À l'aide de la question 1, démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g admet une asymptote $\mathscr{D}_{+\infty}$ en $+\infty$. Préciser l'équation de $\mathscr{D}_{+\infty}$, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport $\mathscr{D}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$.

   (b) Démontrer, de même, que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote $\mathscr{D}_{-\infty}$ en $-\infty$. Préciser l'équation de $\mathscr{D}_{-\infty}$, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport $\mathscr{D}_{-\infty}$ au voisinage de $-\infty$.

108 *Final 2018.*

1. Rappeler, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\cos x}. \end{array}$$

3. On pose pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

   Justifier que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4. Démontrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
5. (a) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Déduire de la question précédente l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage de 0.

1 Reconnaître une application linéaire

109 Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ? Justifier.

1. $f_1 \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z) \end{array}$

2. $f_2 \; : \; \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA \end{array}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont fixés

3. $f_3 \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y,x+y,3y) \end{array}$

4. $f_4 \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

110 On considère l'application $f \; : \; \begin{array}{ccc} M_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+3y-4z \\ x+y+2z \\ -z \end{pmatrix} \end{array}.$

1. Déterminer une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\; f(X) = AX.$$

2. En déduire que f est un endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. L'application f est-elle bijective ?

2 Image et noyau

111 On considère l'application : $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' - P(0). \end{array}$

1. Démontrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Calculer $\varphi(X+1)$.
4. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

112 Soit $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & \big(P(1),P'(2)\big). \end{array}$

1. Démontrer que φ est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. φ est-elle surjective ?

113
1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$f(1,3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(2,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(0,0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'expression de $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

114 On considère l'application linéaire $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X). \end{array}$

1. Déterminer une base du noyau de φ.
2. Déterminer une base de l'image de φ.
3. Vérifier que le résultat est cohérent à l'aide du théorème du rang.

115 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. Démontrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X], \quad (n+1)P - XP' \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. On définit alors l'application

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (n+1)P - XP'. \end{array}$$

   Démontrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. L'application φ est-elle surjective ?

116 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y+z, y-z). \end{array}$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
3. (a) L'application linéaire f est-elle injective ? Justifier.
   (b) L'application linéaire f est-elle surjective ? Justifier.

117 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Notons $B = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de E. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'application suivante :

$$f_m : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2P'' - (2m-1)XP' + m^2P. \end{array}$$

1. Démontrer que l'application f_m est linéaire.
2. Calculer $f_m\left(X^k\right)$ pour $k \in \{0,1,2\}$.
3. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f_m)$ puis la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f_m)$ en fonction du paramètre m.

118 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \left(2x, -2x-y-z, 2y+2z\right).$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

119 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

1. Démontrer l'inclusion : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Démontrer l'inclusion : $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
3. Établir l'équivalence suivante : $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$.

3 Pour travailler seul

120 On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2y-x, x+3y). \end{array}$

1. Déterminer $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)$.
2. Déterminer $\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$.

121 Calculer $f(1,-2,-1)$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[X]$ est l'application linéaire définie par :

$$f(1,0,0) = -X + X^2, \qquad f(0,1,0) = X, \qquad f(0,0,1) = 1 + 3X^3.$$

122
1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\left(1+X+X^2\right) = (1,-2), \qquad f(X) = (1,1), \qquad f\left(1-2X^2\right) = (3,1).$$

2. Calculer $f\left(3X^2\right)$.
3. f est-elle surjective ?
4. f est-elle injective ?

123 *Final Automne 2020.* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)). \end{array}$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. (a) Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f\left(X^2\right)$, $f\left(X^3\right)$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. (a) Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Déduire des questions précédentes la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. (a) Calculer $f(X - X^3)$.
   (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

1 Les essentiels - Domaine de définition

124 Déterminer et représenter graphiquement dans un plan les domaines de définition des fonctions de deux variables ci-dessous.

$$f_1 : (x,y) \mapsto \ln\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right), \qquad f_2 : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \qquad f_3 : (x,y) \mapsto \sqrt{x-y^2}.$$

125 On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(3-x^2-y^2)$.

1. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de f.
2. Soit $\alpha > 0$. Déterminer $\mathscr{L}_{-\alpha}$ la ligne de niveau $-\alpha$ de f.

126 Déterminer et représenter graphiquement dans le plan le domaine de définition de la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln\left(x^2+y^2-4\right)$.

2 Les essentiels - Limite et continuité

127 On définit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 1$.

1. Étudier les limites lorsque $n \to \infty$ de $f\left(0,\frac{1}{n}\right)$ et $f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$.
2. Que peut-on en conclure ?

128 Étudier la continuité des fonctions ci-après définies pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3 Les essentiels - Dérivées partielles premières

129 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,-1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -2.$$

Donner, sans justification, une équation simplifiée du plan tangent à la surface représentative de f au point de coordonnées $(1,-1,2)$.

130 Soit $f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{e}^{\cos(\pi xy)}. \end{array}$ Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}$ à la surface représentative de f au point de coordonnées $\left(1,\frac{1}{2},f\left(1,\frac{1}{2}\right)\right)$.

131 Soit $f : (x,y) \mapsto \arccos(xy-1)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement dans un plan.
2. Calculer la dérivée partielle de f par rapport à y.

4 Les essentiels - Points critiques et extrema

132 Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction f donnée ci-dessous ainsi que la nature de ce(s) point(s) :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x^3-6x^2+2y^3+3y^2. \end{array}$$

133 Étudier les points critiques et leurs natures pour les fonctions suivantes :

$$f_1 : (x,y) \mapsto x^4+y^4-(x-y)^2 \qquad \text{et} \qquad f_2 : (x,y) \mapsto (x-1)(y-2)(x+y-6).$$

134 Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selles.

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1.$$

135 Déterminer les points critiques ainsi que la nature de ces points critiques pour la fonction f définie ci-dessous :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy\exp\left(-x^2-y^2\right). \end{array}$$

136 Déterminer les points critiques ainsi que la nature de ces points critiques pour la fonction f définie ci-dessous :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 5x^2-6xy+2x+2y^2-2y+1. \end{array}$$

137 Soit f la fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=x^4+y^4-4xy.$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à f au point de coordonnées $(1,-1,f(1,-1))$.
3. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
4. Étudier la nature de ce(s) point(s) critique(s).

138 Déterminer les points critiques éventuels de la fonction ci-dessous et leur(s) nature(s) en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$:

$$f:(x,y)\mapsto x^2+2xy+my^2.$$

5 Pour approfondir

139 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Déterminer les dérivées partielles en $(0,0)$ de f.
2. La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

140 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On admet que f admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Les calculer en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
3. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4. La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est-elle continue en $(0,0)$?
5. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

141 Soit f la fonction de deux variables définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^3+y^3+3xy.$$

1. Calculer le gradient de f et sa matrice hessienne.
2. Calculer la dérivée de l'application $x\mapsto f(x,\mathrm{e}^x)$.
3. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=f(x,y)$ au point $(1,1,5)$.
4. Déterminer les points critiques de f.
5. Déterminer la nature de ces points critiques.
6. En considérant l'application $x\mapsto f(x,x)$, démontrer que f n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

142 *Final 2016* **On admet** dans cet exercice que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$ d'inconnue x admet une solution et une seule β dans $\mathbb{R}^*$, et que $\frac{1}{2} < \beta < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U définie par

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y. \end{array}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.
2. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de f en (x,y).
3. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a = (\beta, -2)$.
4. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.

143 *Final 2017* Soit g l'application définie par :

$$g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln(x). \end{array}$$

1. Montrer que g est strictement croissante et dresser son tableau de variations.
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0; +\infty[$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
3. On considère l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^y + y\ln(x). \end{array}$$

   On admet que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur son ensemble de définition.

   (a) Calculer les dérivées partielles premières de F.

   (b) Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de F au point de coordonnées $(1, 0, F(1,0))$.

   (c) Montrer que F admet comme unique point critique le point $(\alpha, \ln(\alpha))$.

   (d) Déterminer la nature de ce point critique.

6 Pour travailler seul

144 Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto \arcsin\left(x^2 + y^2 - 3\right)$$

et le représenter graphiquement dans le plan. On rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

145 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(-1,2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 2.$$

Donner, sans justification, une équation simplifiée du plan tangent à la surface représentative de f au point de coordonnées $(-1, 2, 4)$.

146 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en $(0,0)$.
2. On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Déterminer alors ses dérivées partielles d'ordre de 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$. Que peut-on en déduire ?

147 On considère la fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 + xy.$$

Après avoir trouvé l'unique point critique de g, démontrer sans utiliser les notations de Monge qu'il s'agit d'un minimum global.
Indication : on pourra passer en coordonnées polaires.

1 Pour s'entraîner

148 On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y-x, 2x-z) \end{array}$$

relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

149 Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' + P(0) \end{array}$$

relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

150 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$f(1,0,0) = 1-X, \qquad f(0,1,0) = 2X^2+5X, \qquad f(0,0,1) = (X+1)^2.$$

Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

151 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et on note φ l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer la matrice de φ relativement à la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.
5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
6. $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$ sont-ils en somme directe ?

152 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1,0,-1)$, $e'_2 = (2,-1,-1)$ et $e'_3 = (-1,2,0)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
   (c) En déduire $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$.
   (d) Interpréter f géométriquement.

153 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit deux nouvelles bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement : $\mathscr{B} = (\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I} + \vec{J} - 3\vec{L}, -7\vec{I} + \vec{K} + 5\vec{L})$ et $\mathscr{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k})$. Quelle est la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

154 On considère les vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 de $\mathbb{R}^3$ définis par $\varepsilon_1 = (1,-1,1)$, $\varepsilon_2 = (-2,2,-1)$ et $\varepsilon_3 = (2,-1,2)$.

1. Démontrer que $\mathscr{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{F}$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner les coordonnées dans $\mathscr{F}$ du vecteur $e_1 + e_2 - e_3$.

2 Pour approfondir

155 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E et former $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
2. Exprimer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et calculer P^{-1}.
3. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

156 On note $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, e_3, e_4\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que f est de rang 2.
2. Déterminer, en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$, une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$. En déduire que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$.
3. Sans calculer le produit de matrices, déterminer A^2.
4. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2\right)$. Démontrer que F et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
5. Notons $\left(u_1, u_2\right)$ la base de $\mathrm{Ker}(f)$ trouvée dans la question 2. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{C} = \left(e_1, e_2, u_1, u_2\right)$ de $\mathbb{R}^4$.
6. Déterminer la matrice de passage P entre la base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Exprimer P^{-1}. Que vaut $P^{-1}AP$?

3 Pour travailler seul

157 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que l'ensemble $E_1 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = X\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E_1.
2. (a) Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E_2.
3. Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $E_1 + E_2$ et la dimension de $E_1 + E_2$.
4. Démontrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est A. Déterminer alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ de f relativement à la base $\mathscr{B}'$.

158 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est M. Déterminer successivement le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$, la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

7

1. Posons, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f(x) = \arccos(-x) + \arccos(x).$$

On sait que la fonction arccos est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus, on a : $\forall x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$. Par conséquent, la fonction f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (en tant que composée et somme de fonctions qui le sont) et :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) &= (-1)\arccos'(-x) + \arccos'(x)\\ &= (-1)\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $]-1,1[$. Par continuité de f en -1 et en 1, il s'ensuit que f est constante sur le segment $[-1,1]$. En particulier, on a :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = f(0).$$

Or

$$\begin{cases} f(0) = 2\arccos(0)\\ \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} \in [0,\pi].\end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \pi,$$

i.e.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi}.$$

2. On sait que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc par composition et somme, la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) &= \arctan'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\arctan'\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $]0,+\infty[$.

- <u>1ère méthode :</u> f est constante, donc il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = c.$$

En particulier, on a : $c = f\left(\sqrt{3}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Or

$$\begin{cases}\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).\end{cases}$$

Donc $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ Ainsi, $c = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2},$$

i.e.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}.$$

- <u>2ème méthode :</u> la fonction f est constante sur $]0,+\infty[$ donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = c.$$

Par passage à la limite en $+\infty$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$.

Or on sait d'après le cours que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. D'autre part,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(0) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et donc : $c = \frac{\pi}{2}$.
Par conséquent,

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2},$$

i.e.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}.$$

3. **Indication.** Pour les questions 3 et 4, on ne procède pas comme dans les deux questions précédentes. On utilise des formules de trigonométrie :

$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2, \qquad \sin^2 = 1 - \cos^2.$$

Correction.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\arctan(x)) > 0$. De plus,

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + (\tan(\arctan(x)))^2 = 1 + x^2.$$

Par conséquent,

$$(\cos(\arctan(x)))^2 = \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$\left|\cos(\arctan(x))\right| = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Puisque $\cos(\arctan(x)) > 0$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que

$$\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \cos^2(\arctan(x)).$$

Or, d'après la question précédente,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

D'où

$$\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$\left|\sin(\arctan(x))\right| = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad (*)$$

- Supposons $x \in]-\infty, 0]$. D'après le graphe de la fonction arctan, on sait que $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Donc $\sin(\arctan(x)) \leqslant 0$. D'autre part, $|x| = -x$ car $x \leqslant 0$. Par conséquent $(*)$ devient : $-\sin(\arctan(x)) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ i.e. $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Supposons $x \in [0, +\infty[$. D'après le graphe de la fonction arctan, on sait que $\arctan(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\sin(\arctan(x)) \geqslant 0$. D'autre part, $|x| = x$ car $x \geqslant 0$. Par conséquent $(*)$ devient : $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

22

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} a + c + 3d = 1 \\ -3a + b - c - 8d = -2 \\ 2a - b + 5d = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + c + 3d = 1 \\ b + 2c + d = 1 \\ -b - 2c - d = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + c + 3d = 1 \\ b + 2c + d = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + c + 3d = 1 \\ b + 2c + d = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 - c - 3d \\ b = 1 - 2c - d \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (a,b,c,d) = (1-c-3d, 1-2c-d, c, d).$$

Ainsi, l'ensemble E des solutions du système (S) est :

$$\boxed{E = \left\{\left(1-c-3d, 1-2c-d, c, d\right),\ (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

23 On considère la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait, d'après le cours, que :

$$\text{« } A \text{ est inversible et } A^{-1} = B \text{ »} \iff AB = I_3.$$

Calculons alors le produit AB. Par définition,

$$AB = \begin{pmatrix} (-2)\times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 & (-2)\times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 3 & (-2)\times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 0 \\ (-1) \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 1 & (-1) \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 & (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e.} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient $AB \neq I_3$. L'affirmation « A est inversible et $A^{-1} = B$ » est donc $\boxed{\text{fausse}}$.

24

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cherchons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_4$.

- 1ère méthode. On remarque facilement que A^2 se décompose :

$$\boxed{A^2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} + 3\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_4}$$
$$\boxed{= 2A + 3I_4}.$$

- 2ème méthode. Si on ne voit pas aisément la relation précédente, on résout l'équation $A^2 = aA + bI_4$ d'inconnue $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$A^2 = aA + bI_4 \iff A^2 = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

D'après la matrice A^2 calculée au début de la question, on en déduit :

$$A^2 = aA + bI_4 \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients).}$$

Ainsi,

$$\boxed{A^2 = 2A + 3I_4}.$$

2. **Rappel de cours :** une matrice A de $M_4(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice B de $M_4(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_4$.
D'après la question 1, $A^2 = 2A + 3I_4$. Or,

$$\begin{aligned} A^2 = 2A + 3I_4 &\implies I_4 = \frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A \\ &\implies I_4 = \frac{1}{3}A \times A - \frac{2}{3}I_4 \times A \\ &\implies I_4 = \left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4\right) \times A. \end{aligned}$$

Posons $B = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4$. Alors $B \in M_4(\mathbb{R})$ et $BA = I_4$. On en déduit que A est inversible et que : $A^{-1} = B$. D'où

$$\begin{aligned} \boxed{A^{-1}} &= \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

25

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

$$\boxed{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. Calculons B^2 puis B^3 :

$$\boxed{B^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Donc :

$$\boxed{B^3} = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}.$$

Par conséquent, pour tout entier k supérieur ou égal à 3 on a :

$$\boxed{B^k} = B^3 \times B^{k-3} = 0_3 \times B^{k-3} = \boxed{0_3}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $B = A - I_3$, on peut écrire : $A = B + I_3$ et donc

$$A^n = (B + I_3)^n.$$

Sachant que $BI_3 = I_3B$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(B + I_3)^n$:

$$(B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \underbrace{I_3{}^{n-k}}_{=I_3} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.$$

Donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B^1 + \binom{n}{2}B^2 + \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{B^k}_{\substack{=0_3 \\ \text{car } k\geqslant 3}} \\ &= \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2 + 0_3 \\ &= \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2. \end{aligned}$$

On rappelle que pour tout entier k inférieur ou égal à n,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Par conséquent,

$$\binom{n}{0}=1,\quad \binom{n}{1}=n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

D'où

$$A^n = B^0 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

On sait que $B^0 = I_3$. Par conséquent :

$$\boxed{A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2}.$$

D'après les matrices B et B^2 calculées dans les questions 1 et 2, on obtient :

$$\boxed{A^n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

26 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, C n'est pas inversible.

27 1-f) 2-a) 3-d) 4-e) 5-c) 6-b)

28 Il s'agit de déterminer les coefficients (entiers naturels) à ajouter devant chaque molécule pour obtenir, pour chacun des éléments chimiques intervenant dans la réaction, le même nombre d'atomes du côté des réactifs et du côté des produits. On cherche donc les quadruplets de réels (x,y,z,t) tels que cette équation soit équilibrée :

$$x\ Al(OH)_3 + yH_2\ SO_4 \longrightarrow z\ Al_2(SO_4)_3 + t\ H_2O.$$

Cela donne une équation pour chacun des éléments présents dans l'équation ci-dessus : Al, O, H, S.

Du côté des **réactifs** on a :
- x atomes de l'élément Al
- $3x+4y$ atomes de l'élément O
- $3x+2y$ atomes de l'élément H
- y atomes de l'élément S

Du côté des **produits** on a :
- $2z$ atomes de l'élément Al
- $12z+t$ atomes de l'élément O
- $2t$ atomes de l'élément H
- $3z$ atomes de l'élément S

À l'équilibre, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x = 2z & \text{équation pour l'élément } Al \\ 3x+4y = 12z+t & \text{équation pour l'élément } O \\ 3x+2y = 2t & \text{équation pour l'élément } H \\ y = 3z & \text{équation pour l'élément } S. \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions qui sont données par :

$$\left(\frac{1}{3}t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{6}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En posant $t = 6$, on obtient un quadruplet solution formé d'entiers positifs $(x,y,z,t) = (2,3,1,6)$ qui conduit à la réaction chimique équilibrée :

$$\boxed{2\ Al(OH)_3 + 3\ H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + 6\ H_2O}.$$

46

- Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1+(\cos(t))^2}\mathrm{d}t$. Alors,

$$\begin{aligned}
\boxed{I} &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos'(t)}{1+(\cos(t))^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(t)\times\frac{1}{1+(u(t))^2}\mathrm{d}t \quad \text{où } u \ : \ t\mapsto\cos(t)\\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(t)\times\arctan'\big(u(t)\big)\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\arctan\circ u\big)'(t)\mathrm{d}t\\
&= -\Big[\big(\arctan\circ u\big)(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= -\Big[\arctan(\cos(t))\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= -\left(\arctan\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)-\arctan\big(\cos(0)\big)\right)\\
&= -\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}}\right)\\
&= \boxed{\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

- Soit $J = \int_1^2 \frac{t}{2-t^2}\mathrm{d}t$. On remarque que :

$$J = \int_1^2 \frac{t}{2-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{-2t}{2-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t,$$

où

$$\forall t\in[1,2], \quad u(t) = 2-t^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\boxed{J} &= -\frac{1}{2}\Big[\ln(|u(t)|)\Big]_1^2 = -\frac{1}{2}\Big[\ln\big(|2-t^2|\big)\Big]_1^2\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\ln(|-2|)-\ln(|1|)\Big) = \boxed{-\frac{\ln(2)}{2}}.
\end{aligned}$$

47 • Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$, en posant le changement de variable $x = \sin^2(\theta)$.

❶ *Expression de l'"ancienne" variable x en fonction de la "nouvelle" variable θ :*

$$\underline{x = \sin^2(\theta) = (\sin(\theta))^2}.$$

❷ *Expression de dx en fonction de $d\theta$:*

$$\underline{\mathrm{d}x = 2\sin(\theta)\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta}.$$

❸ *Détermination des nouvelles bornes :*
On remarque que :
- $0 = (\sin(0))^2$
- $1 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$.

Ainsi, par changement de variable,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\underline{\sin^2(\theta)}\big(1-\underline{\sin^2(\theta)}\big)}\ \underline{2\sin(\theta)\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(\theta)}\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\ 2\cos(\theta)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\theta)|\ \sqrt{\cos^2(\theta)}\ 2\cos(\theta)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\sin(\theta)|}_{=\sin(\theta)}\underbrace{|\cos(\theta)|}_{=\cos(\theta)}\ 2\cos(\theta)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Or pour tout $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin(\theta)\geqslant 0$ et $\cos(\theta)\geqslant 0$. Donc,

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\ \mathrm{d}\theta.$$

Linéarisation de l'expression $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$ pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = (\sin(\theta))^2(\cos(\theta))^2 &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{-1}{16}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2 \\
&= \frac{-1}{16}\left(\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)^2 \\
&= \frac{-1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)^2 \\
&= \frac{-1}{16}\left(e^{i2\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2 \\
&= \frac{-1}{16}\left(\left(e^{i2\theta}\right)^2-2\underbrace{e^{i2\theta}e^{-2i\theta}}_{=1}+\left(e^{-2i\theta}\right)^2\right) \\
&= \frac{-1}{16}\left(e^{i4\theta}-2+e^{-4i\theta}\right) \\
&= \frac{-1}{16}\left(\underbrace{e^{i4\theta}+e^{-4i\theta}}_{=2\cos(4\theta)}-2\right) \\
&= \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer I :

$$\begin{aligned}
\boxed{I} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right)\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\,d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(4\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{8}\left[\frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{\sin(2\pi)}{4}-\frac{\sin(0)}{0}\right)=\boxed{\frac{\pi}{8}}.
\end{aligned}$$

- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\times n\right)\left(n-\left(\frac{k}{n}\times n\right)\right)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}n\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),
\end{aligned}$$

où f est la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x)=\sqrt{x(1-x)}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ (comme composée de fonctions continues, car la fonction racine carrée est continue sur $[0,+\infty[$ et la fonction $x \longmapsto x(1-x)$ est continue et positive sur $[0,1]$). Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right)\right]=\int_0^1 f(x)dx.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{x(1-x)}dx=\boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

48 Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

- Étudions la limite de la suite $(S_n)_n$.

  Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$
  où la fonction f est définie par
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sqrt{x}.$$
  Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right).$$
  S_n est donc une somme de Riemman de f sur le segment $[0,1]$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc, d'après le cours, la suite $(S_n)_n$ de ses sommes de Riemman converge vers $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$:
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

- Cherchons un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

  Rappel : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1}$.

  Par définition de S_n on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$
  On sait que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}$, donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{2}{3},$$
  c'est-à-dire
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}} = 1.$$
  Autrement dit,
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}}.$$

49

1. (a) Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t. \end{array}$

   Posons
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad g(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$
   On sait que la fonction g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$). Par conséquent, g admet des primitives sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Soit G une primitive de g sur $]0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} G'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[G(t)\Big]_x^{2x} = G(2x) - G(x).$$
   Or, la fonction G est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc, par composition, la fonction $x \mapsto G(2x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Ainsi, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont. De plus,
$$\begin{aligned}\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x)} &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= 2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\ &\boxed{= \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x}}.\end{aligned}$$

(b) De même, la fonction g étant continue sur l'intervalle $]-\infty[,0$, elle admet des primitives sur cet intervalle. Soit H une primitive de g sur $]-\infty[,0$. Alors, pour tout $x \in]-\infty,0[$,

$$f(x) \;=\; \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_x^{2x} H'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; H(2x)-H(x).$$

Comme dans (a), on peut en déduire que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,0[, \quad f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}}.$$

(c) D'après les questions (a) et (b), la fonction f est dérivable sur l'ensemble $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}^*$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}}.$$

2. (a) Soit $x>0$. Alors $x<2x$ et :

$$\begin{aligned} t\in[x,2x] &\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{2x} & \text{car la fonction exp est croissante}\\ \frac{1}{t}>0 & \text{car } t\geqslant x>0 \end{cases}\\ &\Longrightarrow \frac{1}{t}\times\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{t}\times\mathrm{e}^t \leqslant \frac{1}{t}\times\mathrm{e}^{2x}\\ &\Longrightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t\in[x,2x], \quad \frac{\mathrm{e}^x}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}.$$

En intégrant cet encadrement sur $[x,2x]$, on obtient :

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^x}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\mathrm{d}t,$$

i.e.

$$\mathrm{e}^x\underbrace{\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=I} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{2x}\underbrace{\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=I}.$$

Calculons l'intégrale $I=\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$. Puisque $x>0$ et $2x>0$,

$$I=\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\Big[\ln(|t|)\Big]_x^{2x}=\ln(2x)-\ln(x)=\ln\left(\frac{2x}{x}\right)=\ln(2).$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{\forall x>0, \quad \ln(2)\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\mathrm{e}^{2x}}. \quad (1)$$

(b) Soit $x<0$. Alors $x>2x$. On applique donc le même raisonnement que dans la question précédente mais sur le segment $[2x,x]$:

$$\begin{aligned} t\in[2x,x] &\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{x} & \text{car la fonction exp est croissante}\\ \frac{1}{t}<0 & \text{car } t\leqslant x<0 \end{cases}\\ &\Longrightarrow \frac{1}{t}\times\mathrm{e}^{2x} \geqslant \frac{1}{t}\times\mathrm{e}^t \geqslant \frac{1}{t}\times\mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t\in[2x,x], \quad \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{t}.$$

En intégrant cet encadrement sur $[2x,x]$, on obtient :

$$\int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^{x}}{t}\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\begin{aligned} &\int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^{x}}{t}\mathrm{d}t\\ \Longleftrightarrow\ & -\int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\mathrm{d}t \leqslant -\int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant -\int_{2x}^{x}\frac{\mathrm{e}^{x}}{t}\mathrm{d}t\\ \Longleftrightarrow\ & \int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t}_{=f(x)} \leqslant \int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{e}^{x}}{t}\mathrm{d}t\\ \Longleftrightarrow\ & \mathrm{e}^{2x}\underbrace{\int_{x}^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=J} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{x}\underbrace{\int_{x}^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=J}, \end{aligned}$$

où

$$J = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \Big[\ln(|t|)\Big]_x^{2x} = \ln(|2x|) - \ln(|x|) = \ln(2(-x)) - \ln(-x) = \ln(2).$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{\forall x < 0, \quad \ln(2)\mathrm{e}^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\mathrm{e}^{x}}. \quad (2)$$

3. **Rappel :** on dit qu'une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle non vide est **prolongeable par continuité au point** a si f admet une limite finie en a.

   Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \ln(2)\mathrm{e}^{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(2)\mathrm{e}^{2x} = \ln(2)$, le théorème des gendarmes permet de déduire :
   - de l'encadrement (1) de la question 2.(a), que f admet une limite à droite en 0 et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$,
   - de l'encadrement (2) de la question 2.(b), que f admet une limite à gauche en 0 et que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ln(2)$.

   Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ln(2)$, f admet une limite en 0 et :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ln(2).$$

   La fonction f admet donc une limite finie en 0. Par conséquent, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln(2)$.

81

1. On remarque que :
   - pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \lambda\vec{v_1} = (\lambda,\lambda,0) \neq \vec{v_2} \\ \lambda\vec{v_2} = (4\lambda,\lambda,4\lambda) \neq \vec{v_1} \end{cases}$, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires ;
   - pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \lambda\vec{v_1} = (\lambda,\lambda,0) \neq \vec{v_3} \\ \lambda\vec{v_3} = (2\lambda,-\lambda,4\lambda) \neq \vec{v_1} \end{cases}$, donc les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ ne sont pas colinéaires ;
   - pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \lambda\vec{v_2} = (4\lambda,\lambda,4\lambda) \neq \vec{v_3} \\ \lambda\vec{v_3} = (2\lambda,-\lambda,4\lambda) \neq \vec{v_2} \end{cases}$, donc les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ ne sont pas colinéaires.

2. Résolvons l'équation ci-dessous d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} = 0_{\mathbb{R}^3}. \quad (\star)$$

   Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(4,1,4) + \lambda_3(2,-1,4) = (0,0,0)\\
&\iff (\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 4\lambda_2 + 4\lambda_3) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & L_3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \iff (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (2\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3).
\end{aligned}$$

   Par conséquent,

$$\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda_3\vec{v_1} - \lambda_3\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

   En particulier, pour $\lambda_3 = 1$, on obtient la relation :

$$\vec{v_2} = 2\vec{v_1} + \vec{v_3}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}) \text{ est liée}}$.

82 Considérons les vecteurs $u=(-2,0,1,-2)$, $v=(0,-3,-1,-1)$ et $w=(0,1,0,3)$ de $\mathbb{R}^4$.

- **Étude de la liberté de** (u,v,w)
  - **1ère méthode.** La famille (u,v,w) est libre si et seulement si l'équation
$$\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^4} \quad (\star)$$
    d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ admet $(0,0,0)$ comme unique solution. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.
$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \lambda_1(-2,0,1,-2)+\lambda_2(0,-3,-1,-1)+\lambda_3(0,1,0,3)=(0,0,0,0)\\
&\iff (-2\lambda_1,-3\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2,-2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3)=(0,0,0,0)\\
&\iff \begin{cases}-2\lambda_1=0\\ -3\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\\ -2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1=0\\ -3\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_2=0\\ -\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\\
&\iff (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0).
\end{aligned}$$
    Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est libre}}$.
  - **2ème méthode.** Une famille de 3 vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal à 3. Donc (u,v,w) est libre si et seulement si $\operatorname{rang}(u,v,w)=3$. Calculons le rang de la famille (u,v,w) en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A formée par les coordonnées des vecteurs u, v et w dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:
$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1 & C_2 & C_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-3&1\\1&-1&0\\-2&-1&3\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_3]{} \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&-3\\1&0&-1\\-2&3&-1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3+3C_2]{} \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\1&0&-1\\-2&3&8\end{pmatrix}.$$
    On obtient une matrice échelonnée formée de 3 colonnes non nulles. Donc $\operatorname{rang}(u,v,w)=3$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est libre}}$.
- **Étude du caractère générateur de la famille** (u,v,w)

  D'après le cours, une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ est nécessairement formée d'au moins $\dim\left(\mathbb{R}^4\right)=4$ vecteurs. La famille (u,v,w) n'étant formée que de 3 vecteurs, $\boxed{\text{elle n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

83 On considère les vecteurs I, J, K, L de $M_2(\mathbb{R})$ suivants :
$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

1. - **1ère méthode : avec la définition d'une famille libre.**

     Les vecteurs I, J, K, et L sont linéairement indépendants (i.e. la famille (I,J,K,L) est libre) si et seulement si l'équation
$$\lambda_1 I+\lambda_2 J+\lambda_3 K+\lambda_4 L=0_{M_2(\mathbb{R})} \quad (\star)$$
     d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ admet $(0,0,0,0)$ comme unique solution.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$.

$$(\star) \iff \lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3\\ -\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1-\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda_1 \quad\quad +\lambda_4 = 0 & L_1\\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 & L_2\\ -\lambda_2+\lambda_3 = 0 & L_3\\ \lambda_1 \quad\quad -\lambda_4 = 0 & L_4\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda_1 \quad\quad +\lambda_4 = 0 & \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 & \\ 2\lambda_3 = 0 & L_3\leftarrow L_3+L_2\\ -2\lambda_4 = 0 & L_4\leftarrow L_4-L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_4=0\end{cases}$$

$$\iff (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,0).$$

On en déduit que $\boxed{\text{la famille } (I,J,K,L) \text{ est libre}}$.

- **2ème méthode : en utilisant le rang d'une famille de vecteurs.**

  Une famille de 4 vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal à 4. Donc la famille (I,J,K,L) est libre si et seulement si

  $$\operatorname{rang}(I,J,K,L)=4.$$

  Calculons $\operatorname{rang}(I,J,K,L)$ en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A formée par les coordonnées des vecteurs I, J, K et L dans la base canonique $\mathscr{B}=(M_1,M_2,M_3,M_4)$ de $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

  $$M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad M_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&-1&1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[C_4\leftarrow C_4-C_1]{} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&-1&1&0\\1&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-C_2]{} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&2&0\\1&0&0&-2\end{pmatrix}$$

  On obtient une matrice échelonnée formée de 4 colonnes non nulles. Donc $\operatorname{rang}(I,J,K,L)=4$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (I,J,K,L) \text{ est libre}}$.

2. $M_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension **4**. La famille (I,J,K,L) est une famille libre formée de **4** vecteurs de $M_2(\mathbb{R})$. Par conséquent c'est une base de $M_2(\mathbb{R})$. Donc tout vecteur de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs I, J, K et L, autrement dit :

$$\forall M\in M_2(\mathbb{R}),\quad \exists!(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4,\quad M=\lambda_1 I+\lambda_2 J+\lambda_3 K+\lambda_4 L.$$

84

1. Soit $E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$. On remarque que E est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. On sait que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   (i) Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite constante de terme général 0. Elle converge vers 0. Donc $\underline{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\in E}$.

   (ii) Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ et $v=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$. Par définition de E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Notons ℓ_u et ℓ_v leurs limites respectives. On sait que la suite $u+v$ de terme général u_n+v_n converge vers $\ell_u+\ell_v$. Par conséquent : $u+v\in E$.
   Ainsi, <u>E est stable par addition</u>.

(iii) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons ℓ sa limite. Alors la suite $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓu. Donc : $\lambda u \in E$.
Par conséquent, $\underline{E \text{ est stable par multiplication externe}}$.

On déduit des points (i), (ii) et (iii) que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ainsi, $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}}$.

2. Notons F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergeant vers 0.

   - F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, $F \subset E$ (car une suite constante est convergente) et $F \neq \emptyset$ (car $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$). De plus, F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs car : pour tout nombre réel λ, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites constantes alors la suite $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   - G est un sous-espace vectoriel de E. En effet, par définition de G, on a : $G \subset E$. De plus, $G \neq \emptyset$ (car $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in G$). D'autre part, G est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs car : pour tout nombre réel λ, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergeant vers 0 alors la suite $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda 0 + 0 = 0$.
   - Démontrons que F et G sont supplémentaires dans E, i.e.

$$\forall u \in E, \exists!(v,w) \in F \times G,\ u = v + w.$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Démontrons, en raisonnant par analyse-synthèse, qu'il existe un unique couple $(v,w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

— **Analyse.** Supposons qu'il existe $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ tels que $u = v + w$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + w_n.$$

Par définition de F, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc il existe un réel c tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = c$.
Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c + w_n.$$

Or, par définition de E, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et par définition de G, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$. Par conséquent, les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont entièrement déterminées par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} v_n = c, \\ w_n = u_n - c, \end{cases} \qquad (\star)$$

où $c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

— **Synthèse.** Considérons les suites $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(\star)$ où $c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc : $(v,w) \in F \times G$. De plus, il est évident que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + w_n,$$

i.e.

$$u = v + w.$$

— **Conclusion.** On a donc démontré qu'il existe un unique couple $(v,w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

Ainsi,

$$\forall u \in E, \exists!(v,w) \in F \times G,\ u = v + w.$$

Donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans } E}$.

85 Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, où $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_2 = (1,2,3,4)$ et $v_3 = (2,3,4,5)$. Alors,

$$\dim(F) = \dim\left(\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)\right) = \mathrm{rang}(v_1,v_2,v_3).$$

Calculons $\mathrm{rang}(v_1,v_2,v_3)$ en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A formée par les coordonnées des vecteurs v_1, v_2 et v_3

dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 2 colonnes non nulles. Donc $\mathrm{rang}(v_1, v_2, v_3) = 2$. Par conséquent, $\boxed{\dim(F) = 2}$.

De plus, $F = \mathrm{Vect}\big((1,2,3,4),(0,1,2,3)\big)$ et la famille $\big((1,2,3,4),(0,1,2,3)\big)$ est une base de F.

86 Soit $S_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels. Alors,

$$S_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}.$$

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. Alors M s'écrit de manière unique sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et on a la caractérisation suivante :

$$\begin{aligned} M \in S_2(\mathbb{R}) &\iff {}^tM = M \\ &\iff {}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff b = c \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \boxed{S_2(\mathbb{R})} &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &\boxed{= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}. \end{aligned}$$

On en déduit que $S_2(\mathbb{R})$ est le $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R})}$ engendré par les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

87 Soient $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \qquad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j},$$

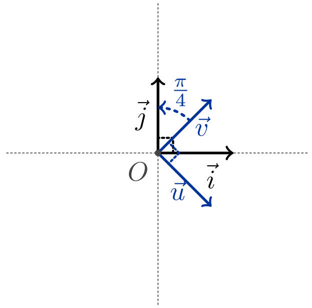
où θ est un nombre réel fixé tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. Montrons que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} &\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \iff\ & \lambda_1\left(\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}\right) + \lambda_2\left(\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\right) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \iff\ & \big(\cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2\big)\vec{i} + \big(-\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2\big)\vec{j} = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \iff\ & \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = 0 & (L_1) \\ -\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2 = 0 & (L_2) \end{cases} \quad \text{car } \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \text{ est libre} \\ \iff\ & \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = 0 \\ \underbrace{\big(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\big)}_{=1}\lambda_2 = 0 & L_2 \leftarrow \underbrace{\cos(\theta)}_{\neq 0}L_2 + \sin(\theta)L_1 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \text{car } \cos(\theta) \neq 0 \\ \iff\ & (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0). \end{aligned}$$

L'équation $\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}=0_{\mathbb{R}^2}$ d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ admet donc $(0,0)$ comme unique solution. Par conséquent, la famille $\mathscr{B}'=(\vec{u},\vec{v})$ est libre. Il s'agit d'une famille formée de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, on en déduit que $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

2. Représentons ci-dessous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ pour $\theta=\frac{\pi}{4}$:



3. Soit $m=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Notons $m_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$ les coordonnées de m dans la base $\mathscr{B}'=(\vec{u},\vec{v})$. Déterminons alors les réels λ_1 et λ_2 :

$$\begin{aligned}
m_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} &\iff m=\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}\\
&\iff (x,y)=\lambda_1\left(\cos(\theta)\vec{i}-\sin(\theta)\vec{j}\right)+\lambda_2\left(\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}\right)\\
&\iff (x,y)=\big(\cos(\theta)\lambda_1+\sin(\theta)\lambda_2\big)\vec{i}+\big(-\sin(\theta)\lambda_1+\cos(\theta)\big)\lambda_2\vec{j}\\
&\iff (x,y)=\left(\cos(\theta)\lambda_1+\sin(\theta)\lambda_2\ ,\ -\sin(\theta)\lambda_1+\cos(\theta)\lambda_2\right)\\
&\iff \begin{cases}\cos(\theta)\lambda_1+\sin(\theta)\lambda_2 &= x \quad (L_1)\\ -\sin(\theta)\lambda_1+\cos(\theta)\lambda_2 &= y \quad (L_2)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\cos(\theta)\lambda_1+\sin(\theta)\lambda_2 &= x\\ \underbrace{\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}_{=1}\lambda_2 &= \sin(\theta)x+\cos(\theta)y\\ & \quad L_2\leftarrow \underbrace{\cos(\theta)}_{\neq 0}L_2+\sin(\theta)L_1.\end{cases}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
m_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} &\iff \begin{cases}\cos(\theta)\lambda_1+\sin(\theta)\lambda_2 &= x\\ \lambda_2 &= \sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\cos(\theta)\lambda_1 &= \underbrace{\left(1-\sin^2(\theta)\right)}_{=\cos^2(\theta)}x-\sin(\theta)\cos(\theta)y\\ \lambda_2 &= \sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\cos(\theta)\lambda_1 &= \cos(\theta)\big(\cos(\theta)x-\sin(\theta)y\big)\\ \lambda_2 &= \sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1 &= \cos(\theta)x-\sin(\theta)y \qquad \text{car } \cos(\theta)\neq 0\\ \lambda_2 &= \sin(\theta)x+\cos(\theta)y.\end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{m_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)x-\sin(\theta)y\\\sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{pmatrix}}.$$

On remarque que :

$$m_{\mathscr{B}'}=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}}_{=R}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{=m_{\mathscr{B}}}=Rm_{\mathscr{B}}.$$

La matrice $\boxed{R=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}}$ est appelée matrice de rotation d'angle θ dans le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

104 Posons $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1-x}{1+x}$.

- **Détermination du $DL_3(0)$ de f**

  Soit x au voisinage de 0.

$$f(x)=(1-x)\times\frac{1}{1+x}\qquad \text{où} \qquad \frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}.$$

On sait que, pour tout u au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^3\varepsilon_1(u) \qquad \text{où} \qquad \lim_{u\to 0}\varepsilon_1(u)=0.$$

Par conséquent, puisque $-x$ est au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+(-x)^3\varepsilon_1(-x),$$

i.e.

$$(\star) \quad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_2(x) \qquad \text{où} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = -\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(-x)=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)\times\left(1-x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_2(x)\right) \\ &= \left(1-x+x^2-x^3\right)+\left(-x+x^2-x^3\right)+x^3\varepsilon_3(x) \qquad \text{où} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0 \\ &= 1-2x+2x^2-2x^3+x^3\varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est :

$$\boxed{f(x) = 1-2x+2x^2-2x^3+x^3\varepsilon_3(x)} \qquad \text{où} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0.$$

- **Détermination du $DL_3(2)$ de f**

 Soit h au voisinage de 0.

$$f(2+h) = \frac{1-(2+h)}{1+(2+h)} = \frac{-1-h}{3+h} = \frac{-(1+h)}{3\left(1+\frac{h}{3}\right)} = \frac{-1}{3}\times(1+h)\times\frac{1}{1+\frac{h}{3}}.$$

D'après $(\star)$, puisque $\frac{h}{3}$ est au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+\frac{h}{3}} = 1-\frac{h}{3}+\left(\frac{h}{3}\right)^2-\left(\frac{h}{3}\right)^3+\left(\frac{h}{3}\right)^3\varepsilon_2\left(\frac{h}{3}\right) \qquad \text{où} \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0.$$

D'où

$$\frac{1}{1+\frac{h}{3}} = 1-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{9}-\frac{h^3}{27}+h^3\varepsilon_4(h) \qquad \text{où} \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon_4(h)=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(2+h) &= \frac{-1}{3}\times(1+h)\times\left(1-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{9}-\frac{h^3}{27}+h^3\varepsilon_4(h)\right) \\ &= \frac{-1}{3}\left(1-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{9}-\frac{h^3}{27}\right)+\left(h-\frac{h^2}{3}+\frac{h^3}{9}\right)+h^3\varepsilon_5(h) \\ &= \frac{-1}{3}\left(1+\frac{2}{3}h-\frac{2}{9}h^2+\frac{2}{27}h^3+h^3\varepsilon_5(h)\right) \\ &= -\frac{1}{3}-\frac{2}{9}h+\frac{2}{27}h^2-\frac{2}{81}h^3+h^3\varepsilon_5(h), \end{aligned}$$

où $\lim_{h\to 0}\varepsilon_5(h)=0$.

Soit x au voisinage de 2. Alors $x-2$ est au voisinage de 0. On en déduit que le développement limité à l'ordre 3 en 2 de $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est :

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}-\frac{2}{9}(x-2)+\frac{2}{27}(x-2)^2-\frac{2}{81}(x-2)^3+(x-2)^3\varepsilon_6(x)},$$

où $\lim_{x\to 0}\varepsilon_6(x)=0$.

105 On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : \;]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{x+1}. \end{array}$$

Soit h soit au voisinage de 0, on a :

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = h\frac{\left(\frac{1}{h}\right)^2 e^{2h}}{\frac{1}{h}+1} = \frac{e^{2h}}{1+h} = e^{2h}\frac{1}{1+h}.$$

D'après les développements limités usuels en 0 on a :

$$\begin{cases} e^{2h} = 1+\dfrac{2h}{1!}+\dfrac{(2h)^2}{2!}+h^2\varepsilon_1(h) = 1+2h+2h^2+h^2\varepsilon_1(h) \\ \dfrac{1}{1+h} = 1-h+h^2+h^2\varepsilon_2(h) \end{cases}$$

où les fonctions ε_1 et ε_2 ont pour limite 0 en 0.

107 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Soit x au voisinage de 0. D'après les développements limités usuels en 0 :

$$\begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x) \\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x) \end{cases}$$

où les fonctions ε_1 et ε_2 ont pour limite 0 en 0. Ainsi,

$$e^x - \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + x^4\varepsilon_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_3(x),$$

où $\varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ est donné par :

$$\boxed{\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon_3(x).}$$

2. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon_3(x)\right) \boxed{= 1}.$$

3. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$. Soit f définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Les fonctions exp, cos et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction $x \mapsto \varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme différence et quotient de fonctions continues. De plus, puisque $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1$, on prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$. La fonction φ ainsi prolongée est donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet par conséquent des primitives sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$$

existe. On sait par ailleurs que la fonction f ainsi définie est l'unique primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \varphi(x)}.$$

   (b) Soit x au voisinage de 0. D'après la question 1,

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon_3(x).$$

Donc f' admet un $DL_1(0)$ donné par :

$$f'(x) = 1 + x + x\varepsilon_4(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

En intégrant ce développement limité, on obtient le $DL_2(0)$ de f :

$$f(x) - f(0) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0.$$

Par définition de f, on a $f(0) = 0$. Donc le $DL_2(0)$ de f est donné par :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x)}.$$

   (c) On déduit de ce développement limité que l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 est $\boxed{y = x}$. De plus, pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$f(x) - x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_5(x)\right)$$

où

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 0 \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_5(x) > 0 \text{ puisque } \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0, \end{cases}$$

donc $f(x) - x \geqslant 0$; autrement dit, $f(x) \geqslant x$.
Cela signifie que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de } T \text{ au voisinage de } 0}$.

4. On considère la fonction g définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$g(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

(a) Soit x au voisinage de $+\infty$. Alors $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0. Or, pour tout h soit au voisinage de 0, on a :
$$hg\left(\frac{1}{h}\right) = h\left(\frac{1}{h}\right)^2\left(e^h - \cos(h)\right) = \frac{1}{h}\left(e^h - \cos(h)\right) = \varphi(h).$$
D'après la question 1, φ admet pour $DL_3(0)$:
$$\varphi(h) = 1 + h + \frac{h^2}{6} + h^3\varepsilon_3(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0.$$
Donc φ admet un $DL_2(0)$ donné par :
$$\varphi(h) = 1 + h + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon_6(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_6(h) = 0.$$
D'où
$$hg\left(\frac{1}{h}\right) = 1 + h + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon_6(h).$$
Puisque $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0, on en déduit en remplaçant h par $\frac{1}{x}$ que :
$$\frac{g(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\,\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right).$$
Ainsi,
$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right),$$
où $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_6(h) = 0$. Par conséquent,
$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x) - (x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$
Donc $\boxed{\mathscr{C}_g \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote } \mathscr{D}_{+\infty} \text{ d'équation } y = x+1}$.
De plus, pour tout x au voisinage de $+\infty$ on a :
$$g(x) - (x+1) = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{6} + \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
où
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} > 0 \\ \dfrac{1}{6} + \varepsilon_6\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0 \text{ puisque } \lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon_6\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0, \end{cases}$$
donc $g(x) - (x+1) > 0$ et $g(x) > x+1$.

Donc, $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty,\ \mathscr{C}_g \text{ est située au-dessus de } \mathscr{D}_{+\infty}}$.

(b) Soit x au voisinage de $-\infty$. Puisque $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0, on peut reprendre le raisonnement et le résultat de la question précédente :
$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right),$$
où $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_6(h) = 0$.

Donc $\boxed{\mathscr{C}_g \text{ admet en } -\infty \text{ une asymptote } \mathscr{D}_{-\infty} \text{ d'équation } y = x+1}$.
Par ailleurs, pour tout x au voisinage de $-\infty$ on a :
$$g(x) - (x+1) = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{6} + \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$
où
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} < 0 \\ \dfrac{1}{6} + \varepsilon_6\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0 \text{ puisque } \lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon_6\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0, \end{cases}$$
donc $g(x) - (x+1) < 0$ et $g(x) < x+1$.

Ainsi, $\boxed{\text{au voisinage de } -\infty,\ \mathscr{C}_g \text{ est située en-dessous de } \mathscr{D}_{-\infty}}$.

108

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après les développements limités usuels :
$$\boxed{(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha-1)\frac{u^2}{2!} + u^2\varepsilon_1(u), \quad \text{où } \varepsilon_1(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0}.$$

2. Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

   Soit x au voisinage de 0.

$$f(x) = \sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos(x) - 1)}$$

   où $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(x) - 1) = 0$. D'après la question précédente avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a pour tout u au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_1(u) \\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon_1(u).\end{aligned}$$

   D'où :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(\cos(x) - 1) - \frac{1}{8}(\cos(x) - 1)^2 + (\cos(x) - 1)^2\varepsilon_1(\cos(x) - 1).$$

   On sait que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_2(x), \quad \text{où } \varepsilon_2(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.$$

   Ainsi :
   - $\cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$
   - $(\cos(x) - 1)^2 = x^2\varepsilon_3(x)$ où $\varepsilon_3(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$.

   On en déduit finalement que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f est donné par :

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.}$$

3. On considère la fonction g définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt.$$

   La fonction cos est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc par composition la fonction f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. f admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit F une primitive de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut alors écrire :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad g(x) = 1 + \int_0^x f(t)\, dt = 1 + [F(t)]_0^x = 1 + F(x) - F(0).$$

   La fonction F étant dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que g l'est aussi et :

$$\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad g'(x)} = F'(x) = f(x) \boxed{= \sqrt{\cos x}}.$$

4. D'après les questions 2 et 3, la fonction g' admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné par :

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.$$

   En intégrant ce développement limité, on en déduit que la fonction g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 donné par :

$$g(x) = g(0) + x - \frac{\frac{x^3}{3}}{4} + x^3\varepsilon_5(x), \quad \varepsilon_5(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.$$

   Or, $g(0) = 1 + \int_0^0 f(t)\, dt = 1$. On obtient donc :

$$\boxed{g(x) = 1 + x - \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_5(x).}$$

5. (a) On déduit du développement limité précédent que la tangente (T) au point d'abscisse 0 à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f a pour équation $\boxed{y = 1 + x}$.

   (b) La position de $\mathscr{C}$ par rapport à T au voisinage de 0 est donnée par l'étude locale du signe de :

$$g(x) - (1 + x) = -\frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_5(x) = x^3\left(-\frac{1}{12} + \varepsilon_5(x)\right), \quad \text{où} \quad \varepsilon_5(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.$$

   Au voisinage de 0, le terme $-\frac{1}{12} + \varepsilon_5(x)$ est strictement négatif et le terme x^3 change de signe, donc la différence $g(x) - (1 + x)$ change de signe. On en déduit que $\boxed{\mathscr{C} \text{ traverse } (T)}$ (autrement dit, 0 est un point d'inflexion pour g). Plus précisément :

- si $x<0$, alors $x^3<0$, donc $g(x)-(1+x)>0$; par conséquent, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est située au-dessus de } (T) \text{ au voisinage de } 0^-}$.

- si $x>0$, alors $x^3>0$ et donc $g(x)-(1+x)<0$; on en déduit que $\boxed{\mathscr{C} \text{ est située en-dessous de } (T) \text{ au voisinage de } 0^+}$.

120

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(x,y)\in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x,y)=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff (x-y,2y-x,x+3y)=(0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} x-y=0\\ 2y-x=0\\ x+3y=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x-y=0 & L_1\\ -x+2y=0 & L_2\\ x+3y=0 & L_3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x-y=0 & \\ y=0 & L_2\leftarrow L_2+L_1\\ 4y=0 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x-y=0\\ y=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}\\
&\iff (x,y)=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(f))=0}$.

2. D'après le théorème du rang appliqué à f,

$$\dim\left(\mathbb{R}^2\right)=\dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Im}(f)),$$

donc

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f))}=\dim\left(\mathbb{R}^2\right)-\dim(\operatorname{Ker}(f))=2-0\boxed{=2}.$$

121 La famille $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, le vecteur $(1,-2,-1)$ s'écrit :

$$(1,-2,-1)=(1,0,0)+(-2)\,(0,1,0)+(-1)\,(0,0,1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(1,-2,-1)&=f\big((1,0,0)+(-2)\,(0,1,0)+(-1)\,(0,0,1)\big)\\
&=f(1,0,0)+(-2)\,f(0,1,0)+(-1)\,f(0,0,1)\quad \text{car } f \text{ est linéaire}\\
&=-X+X^2+(-2)\,X+(-1)\,(1+3X^3)\\
&=-1-3X+X^2-3X^3.
\end{aligned}$$

122

1. Démontrons qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\left(1+X+X^2\right)=(1,-2),\qquad f(X)=(1,1),\qquad f\left(1-2X^2\right)=(3,1).$$

On remarque que les vecteurs $(1,-2)$, $(1,1)$ et $(3,1)$ sont bien trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Il suffit donc de démontrer que la famille (P_1,P_2,P_3) définie par $P_1=1+X+X^2$, $P_2=X$ et $P_3=1-2X^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P=a+bX+cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Résolvons l'équation

$$(\star)\quad P=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$$

d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff a+bX+cX^2=\lambda_1\left(1+X+X^2\right)+\lambda_2 X+\lambda_3\left(1-2X^2\right)\\
&\iff a+bX+cX^2=(\lambda_1+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2)X+(\lambda_1-2\lambda_3)X^2\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=a & L_1\\ \lambda_1+\lambda_2=b & L_2\\ \lambda_1-2\lambda_3=c & L_3\end{cases} \quad \text{par identification des coefficients}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1+\quad\lambda_3=a & \\ \quad\lambda_2-\lambda_3=b-a & L_2\leftarrow L_2-L_1\\ \quad -3\lambda_3=c-a & L_3\leftarrow L_3-L_1.\end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$(\star)\iff\begin{cases}\lambda_1=a-\dfrac{a-c}{3}=\dfrac{2a+c}{3}\\ \lambda_2=(b-a)+\dfrac{a-c}{3}=\dfrac{3b-2a-c}{3}\\ \lambda_3=\dfrac{a-c}{3}.\end{cases}$$

L'équation $(\star)$ admet une unique solution $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. Donc

$$\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \exists!(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ P=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3.$$

Autrement dit, <u>la famille (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$</u>. Par conséquent,

$$\exists! f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}^2\right),\ \begin{cases}f(P_1)=(1,-2)\\ f(P_2)=(1,1)\\ f(P_3)=(3,1).\end{cases}$$

Cela démontre bien le résultat attendu à la question 1, d'après la définition de P_1, P_2 et P_3.

2. On a démontré dans la question 1 que pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$a+bX+cX^2=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\lambda_1=\dfrac{2a+c}{3}\\ \lambda_2=\dfrac{3b-2a-c}{3}\\ \lambda_3=\dfrac{a-c}{3}.\end{cases}$$

   Ainsi,

$$3X^2=1\,P_1+(-1)\,P_2+(-1)\,P_3=P_1-P_2-P_3.$$

   et,

$$\begin{aligned}\boxed{f\left(3X^2\right)}&=f\left(P_1-P_2-P_3\right)\\ &=f(P_1)-f(P_2)-f(P_3) \quad \text{par linéarité de } f\\ &=(1,-2)-(1,1)-(3,1)\\ &\boxed{=(-3,-4)}.\end{aligned}$$

3. On sait que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ i.e. si et seulement si $\mathrm{rg}(f)=2$. Or, la famille $\left(P_1,P_2,P_3\right)$ définie dans la question 1 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc,

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big(f(P_1),f(P_2),f(P_3)\big)=\mathrm{Vect}\big((1,-2),(1,1),(3,1)\big),$$

   et

$$\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{rang}\big((1,-2),(1,1),(3,1)\big).$$

   Pour calculer $\mathrm{rg}(f)$, appliquons l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice $A=\Big((1,-2)_{\mathscr{C}}|(1,1)_{\mathscr{C}}|(3,1)_{\mathscr{C}}\Big)$ où $\mathscr{C}=\big((1,0),(0,1)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow 3C_3 - 2C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée à 2 colonnes non nulles donc :

$$\operatorname{rang}\big((1,-2),(1,1),(3,1)\big) = 2 \quad \text{i.e.} \quad \underline{\operatorname{rg}(f) = 2}.$$

Par conséquent, $\underline{\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$ et $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

4. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f).$$

Donc

$$\underline{\dim(\operatorname{Ker}(f))} = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \operatorname{rg}(f) = 3 - 2 \underline{= 1}.$$

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}}$, autrement dit $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

Autre méthode : D'après la question précédente, f est surjective. Donc si f était injective, alors elle serait bijective et $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$ seraient alors isomorphes. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) \neq \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$, donc $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas isomorphes. On en déduit que f n'est pas injective.

123 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)). \end{array}$

1. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2,\ f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \Big((\lambda P + Q)(-1)\ ,\ (\lambda P + Q)(0)\ ,\ (\lambda P + Q)(1)\Big) \\ &= \Big(\lambda P(-1) + Q(-1)\ ,\ \lambda P(0) + Q(0)\ ,\ \lambda P(1) + Q(1)\Big) \\ &= \Big(\lambda P(-1)\ ,\ \lambda P(0)\ ,\ \lambda P(1)\Big) + \Big(Q(-1)\ ,\ Q(0)\ ,\ Q(1)\Big) \\ &= \lambda\Big(P(-1)\ ,\ P(0)\ ,\ P(1)\Big) + f(Q) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

2. (a) Par définition de f :
   - $f(1) = f(P_1) = (P_1(-1), P_1(0), P_1(1))$ avec $P_1(X) = 1$, donc :
   $$\boxed{f(1) = (1,1,1)}.$$
   - $f(X) = f(P_2) = (P_2(-1), P_2(0), P_2(1))$ avec $P_2(X) = X$, donc :
   $$\boxed{f(X) = (-1,0,1)}.$$
   - $f\left(X^2\right) = f(P_3) = (P_3(-1), P_3(0), P_3(1))$ avec $P_3(X) = X^2$, donc :
   $$\boxed{f(X) = (1,0,1)}.$$
   - $f\left(X^3\right) = f(P_4) = (P_4(-1), P_4(0), P_4(1))$ avec $P_4(X) = X^3$, donc :
   $$\boxed{f(X) = (-1,0,1)}.$$

   (b) La famille $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$). Donc :

   $$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), f\left(X^2\right), f\left(X^3\right)\right).$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big((1,1,1),\underline{(-1,0,1)},(1,0,1),\underline{(-1,0,1)}\big)\\ &= \mathrm{Vect}\big((1,1,1),(-1,0,1),(1,0,1)\big).\end{aligned}$$

Pour déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$, on applique l'algorithme du pivot de Gauss sur la matrice :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$M \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2+C_1\\ C_3 \leftarrow C_3-C_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3+C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 3 colonnes non nulles. On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \big((1,1,1),(0,1,2),(0,0,2)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$ et $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3}$.

Remarque : la famille $\mathscr{F} = \big((1,1,1),(-1,0,1),(1,0,1)\big)$ est également une base de $\mathrm{Im}(f)$ puisqu'elle est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et qu'elle est libre (car formée de 3 vecteurs et de rang 3).

3. (a) Par définition : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = 0_{\mathbb{R}^3}\}}$.

   (b) D'après le théorème du rang appliqué à l'application linéaire f :

$$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

   Or $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ et d'après la question 2(b), $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Par conséquent,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f))} = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 3 \boxed{= 1}.$$

4. (a) f est linéaire donc $f\left(X - X^3\right) = f(X) - f\left(X^3\right)$. D'après la question 2(a), $f(X) = f\left(X^3\right) = (-1,0,1)$. Donc,

$$\boxed{f\left(X - X^3\right) = 0_{\mathbb{R}^3}}.$$

   (b) Puisque $f\left(X - X^3\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on a : $X - X^3 \in \mathrm{Ker}(f)$. D'après la question 3(a), $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \left(X - X^3\right) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

144 On sait que l'ensemble de définition de la fonction arcsin est $[-1,1]$. Donc le domaine de définition de la fonction f est :

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 3 \in [-1,1]\right\}.$$

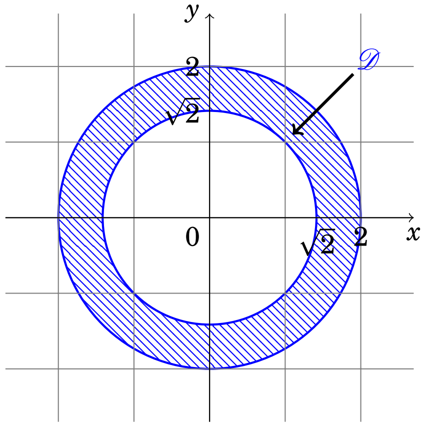
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathscr{D} &\iff -1 \leqslant x^2 + y^2 - 3 \leqslant 1\\ &\iff 2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\\ &\iff \left(\sqrt{2}\right)^2 \leqslant (x-0)^2 + (y-0)^2 \leqslant 2^2.\end{aligned}$$

Ainsi, le domaine de définition de f est

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-0)^2 + (y-0)^2 \leqslant 2^2\right\} \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-0)^2 + (y-0)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2\right\}.$$

On rappelle que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et tout nombre réel strictement positif r, l'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2\right\}$ est exactement le disque de centre (x_0, y_0) et de rayon r. Par conséquent, on peut représenter $\mathscr{D}$ dans le plan par l'anneau hachuré ci-dessous :



145 L'équation du plan tangent $\mathscr{P}$ à la surface représentative de la fonction f au point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, avec $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, est donnée par :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0).$$

En remplaçant par les valeurs suivantes données dans l'énoncé

$$f(-1, 2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = 2,$$

on en déduit que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathscr{P} &\iff z = 4 + (-3)\big(x - (-1)\big) + 2\big(y - 2\big) \\ &\iff z = 4 - 3x - 3 + 2y - 4 \\ &\iff z = -3x + 2y - 3. \end{aligned}$$

Une équation simplifiée du plan $\mathscr{P}$ est donc :

$$\boxed{z = -3x + 2y - 3}.$$

146 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une fonction ε ayant pour limite 0 en 0 telle que :
$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad |f((r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0, 0)| \leqslant \varepsilon(r).$$
Soient $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0, 0)| &= \left| \frac{r\cos\theta\,(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} - 0 \right| \\ &= \left| \frac{r^3\cos\theta\ \sin^2\theta}{r^2} \right| \\ &= r\underbrace{|\cos\theta|}_{\leqslant 1}\ \underbrace{|\sin\theta|^2}_{\leqslant 1}. \end{aligned}$$
Ainsi, en posant $\varepsilon(r) = r$ pour tout $r > 0$, on remarque que $\lim\limits_{r\to 0} \varepsilon(r) = 0$ et :
$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad |f((r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0, 0)| \leqslant \varepsilon(r).$$
On en déduit que :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0).$$
Autrement dit, $\boxed{f \text{ est continue en } (0,0)}$.
2. On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)} = \frac{y^2(x^2 + y^2) - (xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \boxed{= \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}}$$
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - (xy^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \boxed{= \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}}.$$
3. Par définition de f, pour tout réel x non nul, on a $f(x, 0) = 0$. De plus, $f(0, 0) = 0$ donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

Cette limite étant finie, on en déduit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en $(0,0)$ qui vaut :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\boxed{=0}.$$

147 On considère la fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=x^2+y^2+xy.$$

Puisque que g est de classe $\mathscr{C}^2$, elle admet en particulier des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2x+y \quad\text{et}\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2y+x.$$

Les points critiques de g sont les solutions (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ du système suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0.\end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y=0\\ 2y+x=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y=0 & (L_1)\\ x+2y=0 & (L_2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x+2y=0 & (L_1\leftrightarrow L_2)\\ 2x+y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x+2y=0\\ -3y=0 & (L_2\leftarrow L_2-2L_1)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff (x,y)=(0,0).$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet donc un unique point critique qui est } (0,0)}$.

Démontrons que g admet en ce point un minimum global, c'est-à-dire que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$g(x,y)\geqslant g(0,0).$$

- **1ère méthode.** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors on peut écrire x et y en coordonnées polaires sous la forme :

$$x=r\cos\theta \quad\text{et}\quad y=r\sin\theta,$$

avec r et θ deux nombres réels, r étant positif. Alors

$$\begin{aligned} g(x,y)-g(0,0) &= x^2+y^2+xy-0\\ &=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)(r\sin\theta)\\ &=r^2(1+\cos\theta\sin\theta).\end{aligned}$$

Or, on sait que $|\sin\theta|\leqslant 1$ et $|\cos\theta|\leqslant 1$. Donc $|\cos\theta\sin\theta|=|\cos\theta|\,|\sin\theta|\leqslant 1$ i.e. $-1\leqslant\cos\theta\sin\theta\leqslant 1$. On en déduit : $1+\cos\theta\sin\theta\geqslant 0$ et par conséquent $g(x,y)-g(0,0)\geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall((x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)\geqslant g(0,0).$$

Donc $\boxed{g \text{ admet en } (0,0) \text{ un minimum global}}$.

- **2ème méthode.** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On remarque que :

$$\begin{aligned} g(x,y)-g(0,0) &= \left(x^2+xy\right)+y^2\\ &=\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right)+y^2\\ &=\left(\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right)+y^2\\ &=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$g(x,y)-g(0,0)\geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\forall((x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)\geqslant g(0,0),$$

ce qui signifie que $\boxed{g \text{ admet en } (0,0) \text{ un minimum global}}$.

157 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{AX = X} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ -x + y + z = y \\ -x + 2z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x \\ -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff -x + z = 0$$

$$\iff z = x$$

$$\boxed{\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}}.$$

(b) On considère l'ensemble E_1 défini par :

$$E_1 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = X\right\}.$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{x\, u_1 + y\, u_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}, \end{aligned}$$

où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

$\boxed{E_1 \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } M_{3,1}(\mathbb{R})}$: c'est le sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs u_1 et u_2 définis ci-dessus. La famille (u_1, u_2) est donc génératrice de E_1. De plus, les deux vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires car :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u_1 \neq \lambda u_2 \ \text{ et } \ u_2 \neq \lambda u_1.$$

Par conséquent la famille (u_1, u_2) est libre.
Ainsi, $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } E_1}$. D'où, $\boxed{\dim(E_1) = 2}$.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{AX = 2X} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 2x \\ -x + y + z = 2y \\ -x + 2z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$$

$$\boxed{\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}}.$$

(b) On considère l'ensemble E_2 défini par :

$$E_2 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\right\}.$$

D'après la question précédente :

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y\, u_3,\ y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(u_3),$$

où

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{E_2 \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } M_{3,1}(\mathbb{R})}$: c'est le sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par le vecteur u_3.

La famille $\boxed{(u_3) \text{ est donc une base de } E_2}$. D'où, $\boxed{\dim(E_2) = 1}$.

3. Déterminons une base et la dimension de $E_1 + E_2$. D'après les questions précédentes,

$$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) + \mathrm{Vect}(u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

Par conséquent la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $E_1 + E_2$. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer une base de $E_1 + E_2$, appliquons l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice $M = \left((u_1)_{\mathscr{B}} \middle| (u_2)_{\mathscr{B}} \middle| (u_3)_{\mathscr{B}} \right)$.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 3 colonnes non nulles, donc $\mathrm{rang}(u_1, u_2, u_3) = 3$ et la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. La famille $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } E_1 + E_2}$. D'où $\boxed{\dim(E_1 + E_2) = 3}$.

Remarque. On peut aussi choisir comme base de $E_1 + E_2$ la famille (u, v, w) définie par

$$u_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire par $u = u_1$, $v = e_2$ et $w = e_3$.

4. Démontrons que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - On a démontré dans la question précédente que $\dim(E_1 + E_2) = 3$, donc :
   $$\dim(E_1 + E_2) = \dim\left(M_{3,1}(\mathbb{R})\right).$$
   Par conséquent, $\underline{E_1 + E_2 = M_{3,1}(\mathbb{R})}$.
   - D'après la formule de Grassmann,
   $$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$
   Donc,
   $$\dim(E_1 \cap E_2) = \underbrace{\dim(E_1)}_{=2 \text{ d'après 1(b)}} + \underbrace{\dim(E_2)}_{=1 \text{ d'après 2(b)}} - \underbrace{\dim(E_1 + E_2)}_{=3 \text{ d'après 3}} = 2 + 1 - 3 = 0.$$
   Ainsi, $\underline{E_1 \cap E_2 = \{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}}$.

   On en déduit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{E_1 \oplus E_2 = M_{3,1}(\mathbb{R})}.$$

5. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3.$$

Notons que :

$$(u_1)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1, \quad (u_2)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2, \quad (u_3)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3.$$

Soit $f \in \mathscr{L}\left(M_{3,1}(\mathbb{R})\right)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{cases} \left(f(u_1)\right)_{\mathscr{B}} = A\ (u_1)_{\mathscr{B}} = Au_1 \\ \left(f(u_2)\right)_{\mathscr{B}} = A\ (u_2)_{\mathscr{B}} = Au_2 \\ \left(f(u_3)\right)_{\mathscr{B}} = A\ (u_3)_{\mathscr{B}} = Au_3. \end{cases}$$

Or, puisque $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_1$, on a $Au_1 = u_1$ et $Au_2 = u_2$ (par définition de E_1). De même, $u_3 \in E_2$ donc $Au_3 = 2u_3$ (par définition de E_2). Ainsi,
- $\left(f(u_1)\right)_{\mathscr{B}} = u_1 = (u_1)_{\mathscr{B}}$ donc $f(u_1) = u_1$,
- $\left(f(u_2)\right)_{\mathscr{B}} = u_2 = (u_2)_{\mathscr{B}}$ donc $f(u_2) = u_2$,
- $\left(f(u_3)\right)_{\mathscr{B}} = 2u_3 = 2 = (u_3)_{\mathscr{B}} = (2u_3)_{\mathscr{B}}$, donc $f(u_3) = 2u_3$.

Par conséquent, la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on aurait pu aussi calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en utilisant respectivement la 1ère, la 2ème et la 3ème colonne de la matrice A,

$$\begin{cases} f(e_1) = 1e_1 + +(-1)e_2 + (-1)e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_3) = 0e_1 + 1e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

puis en déduire $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ par linéarité de f :

$$\begin{cases} f(u_1) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u1 \\ f(u_2) = f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2 \\ f(u_3) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_3 \end{cases}$$

et obtenir enfin la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

158 • Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonnique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Notons $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les trois vecteurs de la base canonique $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ de $\mathbb{R}^3$. Par définition de M, on sait que :

$$\begin{cases} f(e_1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 = (1,0,1) \\ f(e_2) = (-1)e_1 + 1e_2 + (-2)e_3 = (-1,1,-2) \\ f(e_3) = 2e_1 + 0e_2 + 2e_3 = (2,0,2). \end{cases}$$

Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a également :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big).$$

Pour calculer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, on échelonne (par colonnes) la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$, à savoir la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée à 2 colonnes non nulles. On en déduit que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, autrement dit : $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

- De plus, grâce à la matrice échelonnée obtenue, on sait que les vecteurs

$$1e_1 + 0e_2 + 1e_3 = \boxed{(1,0,1)} \quad \text{et} \quad 0e_1 + 1e_2 + (-1)e_3 = \boxed{(0,1,-1)}$$

$\boxed{\text{forment une base de } \mathrm{Im}(f)}$.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

On en déduit :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f))} = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = \boxed{1}.$$

- Puisque $f(e_3) = 2f(e_1)$, on a $f(e_3 - 2e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, i.e. $e_3 - 2e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Le vecteur $e_3 - 2e_1 = (-2,0,1)$ étant non nul, il forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f)$ étant de dimension 1, la famille $\big((-2,0,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.