

1 Les essentiels

1 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \arctan(1), \arcsin(0).$$

2 Calculer :

$$\arccos(0), \arccos(-1), \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \arctan(\sqrt{3}), \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

3 Soit $x \in [-1, 1]$.

- Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \quad \cos(2\arcsin(x)).$$

- Démontrer que :

$$(a) \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad (b) \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

4 Démontrer la formule ci-dessous :

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

5 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad g : x \mapsto \arcsin x.$$

- Déterminer les domaines de définition de f et de g .
- Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
- En déduire une relation entre f et g .

6 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

- Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

2 Pour travailler seul

8 Démontrer les formules ci-dessous :

- $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
- $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

9 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1, 0]$.

1 Les essentiels

10 Déterminer les solutions des systèmes ci-dessous :

$$1. \begin{cases} -2x + y + 8z = -2 \\ 3x - 2y - 12z = 7 \\ -2x + y + 8z = -3 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 3y + 3z = -12 \\ -x + 3y + 6z = -15 \\ 2x + 2y - 4z = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3y - z + t = 4 \\ -x + y + z + t = 0 \\ -y - 2z + t = -4 \\ -x + 2y + z + t = 2 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x + 3z = 3 \\ -2x - y - 7z = -6 \\ 2x + 3y + 9z = 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -2y - 6z + 8t = 6 \\ -x - y - 5z + 7t = 7 \\ -x - 3y - 11z + 15t = 13 \\ -x - 2y - 8z + 11t = 10 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x + 2z - 4t = 4 \\ -3x + 2y + z + 4t = -12 \\ 3x - 3y - 3z - 3t = 15 \\ -x - y - 3z + 3t = 1. \end{cases}$$

11 Soit m un paramètre réel.

1. Échelonner le système (S) d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + my + m^2z = 1 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ mx + m^2y + z = 0. \end{cases}$$

- Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le système (S) admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de m .
- Résoudre (S) pour les autres valeurs de m .

12 Effectuer, lorsque cela est possible, les calculs matriciels suivants :

$$1. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 4. (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 6. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les produits QP et PDQ .
- En déduire une méthode simple pour calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14 Déterminer la transposée de chacune des matrices ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ -2 \ 0), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
- En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

16 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = A - aI_3$, où a et b sont

deux réels fixés non nuls.

- Expliciter les coefficients de la matrice B .

- Calculer B^2 et B^3 , puis B^k pour tout entier $k \geq 3$.
- En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Pour approfondir

18 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
- Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
- Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$ et toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, on pose :

$$P(M) = a_n M^n + \dots + a_2 M^2 + a_1 M + a_0 I_2.$$

On admet alors le résultat suivant : *Théorème. Pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, et tout nombre réel λ ,*

- (i) $P(M) \in M_2(\mathbb{R})$,
- (ii) $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$,
- (iii) $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$.

Déduire alors de la question précédente l'expression de la matrice A^n en précisant ses coefficients.

- On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

Écrire la relation de récurrence précédente sous forme matricielle et en déduire l'expression de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$ en fonction de u_0, v_0 et n .

19 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit le nombre réel $\det(A) = ad - bc$, appelé le **déterminant** de la matrice A .

- On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB .
- (a) En déduire que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.
(b) En utilisant la question 1, démontrer que si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.
- Quel résultat a-t-on démontré ?

3 Pour travailler seul

20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_4$.
- En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

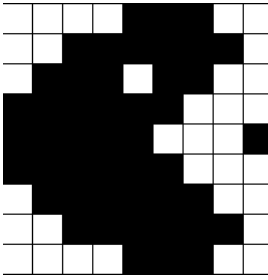
21 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

- Expliciter les coefficients de la matrice B .
- Calculer B^2 et B^3 , puis B^k pour tout entier $k \geq 3$.
- En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

22 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

23 *Initiation au traitement d'images.* On considère la matrice M de $M_9(\mathbb{R})$ formée de 0 et de 1 représentant l'image ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


Dans cet exercice, pour transformer une matrice en une image, on utilise le code couleur suivant :

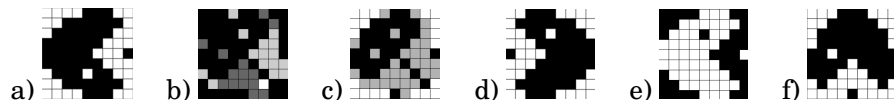
$$0 : \blacksquare \quad 1 : \square \quad \frac{1}{2} : \blacksquare \quad -\frac{1}{2} : \blacksquare.$$

On définit les matrices

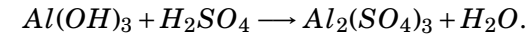
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associer chaque calcul matriciel ci-dessous à l'image correspondante.

1. tM
2. $A \times M$
3. $M \times A$
4. $U - M$
5. $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$
6. $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$



24 *Les systèmes linéaires en chimie.* Utiliser la résolution d'un système linéaire adéquat pour équilibrer la réaction chimique ci-dessous entre l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ et l'acide sulfurique H_2SO_4 :



1 Les essentiels

25 Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous en précisant leurs ensembles de définition :

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|
| 1. $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ | 3. $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ | 5. $x \mapsto \tan(x)$ |
| 2. $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$ | 4. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ | 6. $t \mapsto \sqrt{t}$. |

26 Calculer les intégrales ci-dessous :

- | | |
|---|--|
| 1. $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{1-x^2} dx,$ | 4. $J_1 = \int_0^1 \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ |
| 2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(t) dt,$ | 5. $J_2 = \int_0^\pi \cos^2(t)\sin^2(t) dt,$ |
| 3. $I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}} dx,$ | 6. $J_3 = \int_0^{2\pi} \cos(x) dx.$ |

27 Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

- | | |
|---|--|
| 1. $I = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt,$ | 3. $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t) dt,$ |
| 2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(x) dx,$ | 4. $L = \int_0^1 (t^2 - t + 2)e^{-t} dt.$ |

28 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

- $I = \int_2^{2,5} \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx,$ en posant $x = 2 + \sin(t),$
- $J = \int_1^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{-x} + e^x} dx,$ en posant $t = e^x,$
- $K = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx,$ en posant $u = \sqrt{x},$

4. $L = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-t^2 + 2t + 3}} dt,$ en posant $u = \frac{t-1}{2}.$

29 1. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall u \in]-1; 1[, \frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}.$$

2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{2}t - 1,$ déterminer les primitives de la fonction $t \mapsto \frac{1}{4t-t^2}$ sur $]0; 4[.$

30 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous sont dérivables et exprimer leur dérivée :

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt, \quad h(x) = \int_0^x x f(t) dt, \quad \varphi(x) = x^2 \int_{-x}^x x f(t) dt.$$

31 Déterminer, en utilisant les sommes de Riemann, les limites des suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + nk^2}.$$

Indication : pour finaliser le calcul de la limite de $U_n,$ on pourra déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{1+x^2} = a + \frac{b}{1+x^2}.$

2 Pour approfondir

32 On considère la fonction $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{2e^t + 1} dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter f' .
- (a) Démontrer que pour $x > 0$ et $t \in [0; x]$: $\frac{1}{2e^x + 1} \leq \frac{1}{2e^t + 1} \leq \frac{1}{3}$.
 (b) En déduire : $\forall x > 0, \frac{1}{2e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$.
- La fonction f est-elle continue en 0 ?

33 *Médian 2014.* Soit a un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx.$$

- Calculer I_0 en fonction de a .
- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0, a]$:

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!}.$$

- (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n .
- (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité

$$I_k = I_{k-1} - \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

- Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = I_0 - e^{-a} \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}.$$

- En déduire finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$.

3 Pour travailler seul

34 Calculer les intégrales ci-dessous :

$$1. I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1 + (\cos(t))^2} dt,$$

$$2. J = \int_1^2 \frac{t}{2 - t^2} dt.$$

35 Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} dx$, en utilisant le changement de variable $u = \cos(x)$.

36 Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$, en posant le changement de variable $x = \sin^2(\theta)$, puis en déduire la valeur de :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}.$$

37 En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$, puis en déduire un équivalent simple lorsque $n \rightarrow +\infty$ de la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

38 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

- (a) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer f' sur $]0; +\infty[$.
 (b) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et déterminer f' sur $] -\infty; 0[$.
 (c) En déduire que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner l'expression de sa dérivée sur \mathbb{R}^* .
- (a) Lorsque $x > 0$, donner un encadrement de e^t pour $t \in [x, 2x]$. En déduire l'encadrement : $\forall x > 0, \ln(2)e^x \leq f(x) \leq \ln(2)e^{2x}$.
 (b) Démontrer de même : $\forall x < 0, \ln(2)e^{2x} \leq f(x) \leq \ln(2)e^x$.
- Prolonger f par continuité en 0.

1 Sous-espaces vectoriels

39 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ? Justifier.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0\}$,
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy = 1\}$,
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z - 1 = 0\}$,
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z = 0\}$.

40 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels? Justifier.

1. $F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(0) = 1\}$,
2. $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(1) = P(2)\}$,
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$,
4. $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$.

41 L'ensemble $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_0 - 2u_1 = 0\}$ est-il un espace vectoriel?

42 L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) + P'(X) = 0\}$ est-il un espace vectoriel?

2 Familles libres, familles génératrices, bases

43 Les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^2 sont-elles libres? Sont-elles génératrices de \mathbb{R}^2 ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 1), (1, 0)), \quad \mathcal{F}_2 = ((1, 1), (2, 2)), \quad \mathcal{F}_3 = ((1, 0)).$$

44 Considérons, dans $\mathbb{R}_2[X]$, les polynômes :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X + 1, \quad Q_3 = X^2 + 2X.$$

1. Soit $P = X^2 + 1$. A-t-on $P \in \text{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3)$?
2. La famille (Q_1, Q_2, Q_3) est-elle libre?

45 Justifier que l'ensemble F ci-dessous est un espace vectoriel et déterminer une base de F :

$$F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + b \\ a - b & a + 5b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

46 Justifier que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - 2z = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

47 On considère les fonctions f, g et h définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = \sin(x) \\ h(x) = x. \end{cases}$$

La famille (f, g, h) est-elle libre?

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

48 Soient $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y = z\}$. Déterminer une famille génératrice de $F + G$.

49 Soient $P = 1 + X^2$ et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par P .

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$. Appliquer le théorème de la division euclidienne pour la division euclidienne du polynôme A par le polynôme P .
(b) En déduire que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. En déduire un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}[X]$ tel que F et G soient supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Dimension

50 On considère un espace vectoriel E sur \mathbb{R} , muni d'une base (e_1, e_2, e_3) . On définit $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, où

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

- Démontrer que \mathcal{F} est une base de E .
- Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base \mathcal{F} .

51 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

- $((1, 1), (3, 1))$ de \mathbb{R}^2 .
- $((1, 0, 2), (1, 2, 1))$ de \mathbb{R}^3 .

52 Les familles ci-dessous de vecteurs de \mathbb{R}^2 sont-elles libres? Sont-elles génératrices de \mathbb{R}^2 ?

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (1, 2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = ((1, 0), (2, -1), (3, 3)).$$

53 1. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, -1, 1)$ et $\vec{v} = (2, 3, 0, -1)$ de \mathbb{R}^4 . Calculer le rang de la famille (\vec{u}, \vec{v}) .

2. Calculer le rang de la famille (P, Q, R) de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$P = 1 + X - X^2, \quad Q = -X + 3X^2, \quad R = 2 + X - X^2.$$

54 On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 définis par $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$, où

$$\begin{cases} a = (1, 2, 3, 4) \\ b = (1, 1, 1, 3) \\ c = (2, 1, 1, 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = (-1, 0, -1, 2) \\ y = (2, 3, 0, 1). \end{cases}$$

Déterminer les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$. La somme $F + G$ est-elle directe ?

55 On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0\}, \quad G = \text{Vect}(1 + X, X + X^2, X^2 + X^3).$$

- Déterminer les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$.
- Donner une base de $F \cap G$.

56 Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, $u_4 = (-1, 0, 2)$ et $u_5 = (-1, 2, 4)$ ainsi que les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ci-après :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_4, u_5).$$

- Déterminer la dimension de chacun des espaces F et G .
- F et G sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

5 Pour approfondir

57 On considère le système linéaire (S) ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + 2z - 3t = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + y + 4z - 5t = 0. \end{cases}$$

- (a) Résoudre (S) .
(b) En déduire que l'ensemble F formé par les solutions du système (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 dont on déterminera une base.
- Justifier que l'ensemble $G = \{(a - b, 0, a, 3a + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base.
- Démontrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .

58 On considère les sous-ensembles \mathcal{S} et \mathcal{A} de $M_n(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathcal{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}, \quad \mathcal{A} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = -M\}.$$

- Démontrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
- Démontrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

6 Pour travailler seul

59 Soient dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)$.

- Démontrer que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec \vec{v}_1 et \vec{v}_3 , puis avec \vec{v}_2 et \vec{v}_3 .
- La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ?

60 Les vecteurs $u = (-2, 0, 1, -2)$, $v = (0, -3, -1, -1)$ et $w = (0, 1, 0, 3)$ de \mathbb{R}^4 forment-ils une famille libre? Une famille génératrice de \mathbb{R}^4 ?

61 1. Démontrer que les vecteurs I, J, K, L de $M_2(\mathbb{R})$ définis ci-dessous sont linéairement indépendants :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

62 Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$.

- Démontrer que E est un espace vectoriel.
- Démontrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

63 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $v_1 = (0, 1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_3 = (2, 3, 4, 5)$.

64 Démontrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, engendré par 3 matrices que l'on précisera.

65 On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et on considère les vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) de \mathbb{R}^2 définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \quad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}.$$

où θ est un nombre réel fixé tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

- Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^2 .
- Représenter les vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.
- Soit $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées du vecteur m dans la base \mathcal{B}' , puis expliciter la matrice $R \in M_2(\mathbb{R})$ telle que : $m_{\mathcal{B}'} = R m_{\mathcal{B}}$.

1 Pour s'entraîner : calculs de développements limités

66 1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + e^x - \cos(x)$ à l'ordre 3 en 0.

2. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

3. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

4. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sin(2x^2)$ à l'ordre 5 en 0.

67 1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \exp(x)$ à l'ordre 3 en 2.
 2. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \ln x$ à l'ordre 2 en 3.
 3. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 en $\pi/2$.
 4. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4.

68 Déterminer le développement limité de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.

69 En se rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de \tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois jusqu'à obtenir le $DL_5(0)$ de \tan .

2 Étude locale des fonctions en un point

70 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

71 On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^4}$. Calculer $\varphi^{(5)}(0)$.

72 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

73 Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\cos(x) - e^x}{x}$$

- Démontrer que f admet une limite en 0. On notera encore f le prolongement par continuité de f .
- Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en 0.
- Quelles sont les positions relatives de T et de \mathcal{C}_f au voisinage de 0 ?

74 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$.

- (a) Rappeler le $DL_2(0)$ de la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u}$.
 (b) En déduire le $DL_4(0)$ de la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$.
 (c) Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction f .
- En déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f de f en 0, ainsi que la position de \mathcal{C}_f par rapport à (T).

75 Soit f la fonction définie par :

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2}$$

- Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
- Quelle est alors la position relative, au voisinage de 0, de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

3 Étude locale des fonctions en l'infini

76 Soit f la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = e^{1/x} \sqrt{x(x+2)}.$$

Démontrer l'existence d'une asymptote (D) en $+\infty$ à la courbe \mathcal{C}_f représentant f et déterminer son équation, ainsi que la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

77 Considérons la fonction

$$f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Démontrer que la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$. Déterminer l'équation de (D) et préciser la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

4 Pour travailler seul

78 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}.$$

- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ .
- En déduire la limite ℓ de φ en 0.
- On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

- (a) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .
- (c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse 0 et la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (T) au voisinage de 0.

4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

- (a) À l'aide de la question 1, démontrer que la courbe représentative \mathcal{C}_g de la fonction g admet une asymptote oblique $\mathcal{D}_{+\infty}$ en $+\infty$. Préciser l'équation de $\mathcal{D}_{+\infty}$, ainsi que la position relative de \mathcal{C}_g par rapport à $\mathcal{D}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$.
- (b) Démontrer, de même, que \mathcal{C}_g admet une asymptote oblique $\mathcal{D}_{-\infty}$ en $-\infty$. Préciser l'équation de $\mathcal{D}_{-\infty}$, ainsi que la position relative de \mathcal{C}_g par rapport à $\mathcal{D}_{-\infty}$ au voisinage de $-\infty$.

79

- Rappeler, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$.
- Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\cos x}.$$

3. On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t} dt.$$

- Justifier que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Démontrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
 - (a) On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g . Déduire de la question précédente l'équation de la tangente (T) à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
(b) Déterminer la position relative de \mathcal{C} par rapport à (T) au voisinage de 0.

1 Reconnaître une application linéaire

80 Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ? Justifier.

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y, z)$
- $f_2 : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont fixés
 $M \mapsto AM - MA$
- $f_3 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$
 $(x, y) \mapsto (x - 2y, x + y, 3y)$
- $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto xy$

81 On considère l'application

$$f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y - 4z \\ x + y + 2z \\ -z \end{pmatrix}.$$

- Déterminer une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX.$$

- En déduire que f est un endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- L'application f est-elle bijective ?

2 Image et noyau

82 On considère l'application : $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto P' - P(0).$

- Démontrer que φ est linéaire.
- Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.

- Calculer $\varphi(X + 1)$.
- En déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

83 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$f(1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(0, 0, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

84 On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P(X) \mapsto XP'(X).$

- Déterminer une base du noyau de φ .
- Déterminer une base de l'image de φ .
- Vérifier que le résultat est cohérent à l'aide du théorème du rang.

85 On considère l'application suivante : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

- Démontrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- L'application f est-elle injective ?
- L'application f est-elle surjective ?

86 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Notons $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_m : E \rightarrow E$$

$$P \mapsto X^2 P'' - (2m - 1)XP' + m^2 P.$$

- Démontrer que l'application f_m est linéaire.
- Calculer $f_m(X^k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

3. En déduire une base et la dimension de $\text{Im}(f_m)$ puis la dimension et une base de $\text{Ker}(f_m)$ en fonction du paramètre m .

87 Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (2x, -2x - y - z, 2y + 2z).$$

- Démontrer que f est linéaire.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

88 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires.

- Démontrer l'inclusion : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- Démontrer l'inclusion : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
- Établir l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im}f \subset \text{Ker}g.$$

3 Pour travailler seul

89 On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x - y, 2y - x, x + 3y).$$

- Déterminer $\dim(\text{Ker}(f))$.
- Déterminer $\dim(\text{Im}(f))$.

90 Calculer $f(1, -2, -1)$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est l'application linéaire définie par :

$$f(1, 0, 0) = -X + X^2, \quad f(0, 1, 0) = X, \quad f(0, 0, 1) = 1 + 3X^3.$$

91 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1 + X + X^2) = (1, -2), \quad f(X) = (1, 1), \quad f(1 - 2X^2) = (3, 1).$$

- Calculer $f(3X^2)$.
- f est-elle surjective?
- f est-elle injective?

92 *Final Automne 2020.* Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)).$

- Démontrer que f est linéaire.
- (a) Calculer $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)$.
 (b) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- (a) Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$.
 (b) Déduire des questions précédentes la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- (a) Calculer $f(X - X^3)$.
 (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

1 Pour s'entraîner

93 On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^2 . Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (y - x, 2x - z)$$

relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .

94 Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto XP' + P(0)$$

relativement à la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$.

95 Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$f(1, 0, 0) = 1 - X, \quad f(0, 1, 0) = 2X^2 + 5X, \quad f(0, 0, 1) = (X + 1)^2.$$

Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 et \mathcal{C} de $\mathbb{R}_2[X]$.

96 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ et φ l'application définie par :

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto AM - MA \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que \mathcal{B} est une base de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer la matrice de φ relativement à la base \mathcal{B} .

4. Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$.
5. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
6. $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont-ils en somme directe?

97 On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (2, -1, -1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 0)$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Écrire la matrice de f dans \mathcal{B}' .
 - (c) En déduire $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
 - (d) Interpréter f géométriquement.

98 Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit deux nouvelles bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 respectivement : $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I} + \vec{J} - 3\vec{L}, -7\vec{I} + \vec{K} + 5\vec{L})$ et $\mathcal{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k})$. Quelle est la matrice de f relativement à \mathcal{B} et \mathcal{B}' ?

99 On considère les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 de \mathbb{R}^3 dont les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont données par $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$, $\varepsilon_2 = (-2, 2, -1)$ et $\varepsilon_3 = (2, -1, 2)$.

1. Démontrer que $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Écrire la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{F} .
3. Donner les coordonnées dans \mathcal{F} du vecteur $e_1 + e_2 - e_3$.

2 Pour approfondir

100 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relativement à la base \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

- Démontrer que \mathcal{B}' est une base de E et former $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
- Exprimer la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et calculer P^{-1} .
- Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

101 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et on considère f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que f est de rang 2.
- Déterminer, en fonction des vecteurs de \mathcal{B} , une base de $\text{Ker} f$ et une base de $\text{Im} f$. En déduire que $\text{Im} f = \text{Ker} f$.
- Sans calculer le produit de matrices, déterminer A^2 .
- On pose $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrer que F et $\text{Ker} f$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
- Notons (u_1, u_2) la base de $\text{Ker}(f)$ trouvée dans la question 2. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ de \mathbb{R}^4 .
- Déterminer la matrice de passage P entre la base \mathcal{B} et \mathcal{C} . Exprimer P^{-1} . Que vaut $P^{-1}AP$?

3 Pour travailler seul

102 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - En déduire que l'ensemble $E_1 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = X\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E_1 .
- Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - En déduire que l'ensemble $E_2 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 2X\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E_2 .
- Déterminer une base \mathcal{B}' de $E_1 + E_2$ et la dimension de $E_1 + E_2$.
- Démontrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- On note \mathcal{B} la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base \mathcal{B} est A . Déterminer alors la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f relativement à la base \mathcal{B}' .

103 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base canonique est M . Déterminer successivement le rang de f , une base de $\text{Im}(f)$, la dimension de $\text{Ker}(f)$, puis une base de $\text{Ker}(f)$.