

1 Les essentiels

1 Calculer :

1. $\arccos(0)$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$.
2. $\arctan(1)$, $\arccos(1)$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2 Soit $x \in [-1, 1]$.

1. Démontrer que :

$$(a) \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad (b) \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \quad \cos(2\arcsin(x)).$$

3 On considère la fonction

$$f :]-1, 0[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2}).$$

1. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que f est dérivable. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1, 0[$.
3. À l'aide des questions précédentes, démontrer que :

$$\forall x \in]-1, 0[, \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(x).$$

4 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5 *Final MT1 - A2022*

1. On définit la fonction f sur \mathbb{R}^{++} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis, démontrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

2. (a) Déterminer la limite de f en zéro.
(b) On admet que f est dérivable sur $I =]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
(c) En déduire que f est bijective de I sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en zéro.
On notera encore f la fonction prolongée à l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.
Que vaut $f(0)$?

6 1. Démontrer que : $\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

2 Pour travailler seul

7 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1 Les essentiels

8 Déterminer les solutions des systèmes ci-dessous :

$$1. \begin{cases} 3y - z + t = 4 \\ -x + y + z + t = 0 \\ -y - 2z + t = -4 \\ -x + 2y + z + t = 2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} -2y - 6z + 8t = 6 \\ -x - y - 5z + 7t = 7 \\ -x - 3y - 11z + 15t = 13 \\ -x - 2y - 8z + 11t = 10 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x + y + 8z = -2 \\ 3x - 2y - 12z = 7 \\ -2x + y + 8z = -3 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x + 2z - 4t = 4 \\ -3x + 2y + z + 4t = -12 \\ 3x - 3y - 3z - 3t = 15 \\ -x - y - 3z + 3t = 1. \end{cases}$$

9 Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois plans \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 d'équations respectives :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : 3y + 3z &= -12 \\ \mathcal{P}_2 : -x + 3y + 6z &= -15 \\ \mathcal{P}_3 : 2x + 2y - 4z &= -2. \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection des plans \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 .

10 Soit m un paramètre réel.

1. Échelonner le système (S) d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + my + m^2z = 1 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ mx + m^2y + z = 0. \end{cases}$$

- Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le système (S) admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de m .
- Résoudre (S) pour les autres valeurs de m .

11 Effectuer, lorsque cela est possible, les calculs matriciels suivants :

$$1. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 4. (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 6. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les produits QP et PDQ .
- En déduire une méthode simple pour calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13 Déterminer la transposée de chacune des matrices ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ -2 \ 0), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

14 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
- En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

15 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = A - aI_3$, où a et b sont deux réels fixés non nuls.

- Expliciter les coefficients de la matrice B .

- Calculer B^2 et B^3 , puis B^k pour tout entier $k \geq 3$.
- En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Pour approfondir

17 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
- Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
- Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$ et toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, on pose :

$$P(M) = a_n M^n + \dots + a_2 M^2 + a_1 M + a_0 I_2.$$

On admet alors le résultat suivant : *Théorème. Pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, et tout nombre réel λ ,*

- $P(M) \in M_2(\mathbb{R})$,
- $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$,
- $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$.

Déduire alors de la question précédente l'expression de la matrice A^n en précisant ses coefficients.

- On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

Écrire la relation de récurrence précédente sous forme matricielle et en déduire l'expression de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$ en fonction de u_0, v_0 et n .

18 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit le nombre réel $\det(A) = ad - bc$, appelé le **déterminant** de la matrice A .

- On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB .
- En déduire que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.
 - En utilisant la question 1, démontrer que si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.
- Quel résultat a-t-on démontré ?

3 Pour travailler seul

19 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_4$.
- En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

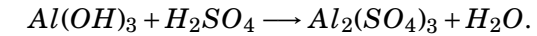
20 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

- Expliciter les coefficients de la matrice B .
- Calculer B^2 et B^3 , puis B^k pour tout entier $k \geq 3$.
- En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

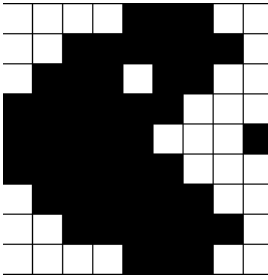
21 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

23 *Les systèmes linéaires en chimie.* Utiliser la résolution d'un système linéaire adéquat pour équilibrer la réaction chimique ci-dessous entre l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ et l'acide sulfurique H_2SO_4 :



22 *Initiation au traitement d'images.* On considère la matrice M de $M_9(\mathbb{R})$ formée de 0 et de 1 représentant l'image ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


Dans cet exercice, pour transformer une matrice en une image, on utilise le code couleur suivant :

$$0 : \blacksquare \quad 1 : \square \quad \frac{1}{2} : \blacksquare \quad -\frac{1}{2} : \blacksquare.$$

On définit les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associer chaque calcul matriciel ci-dessous à l'image correspondante.

1. tM
2. $A \times M$
3. $M \times A$
4. $U - M$
5. $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$
6. $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$

