MT3

Algèbre et Analyse

Troisième partie

Cours écrit par Alexis Flesch et Damien Fourny

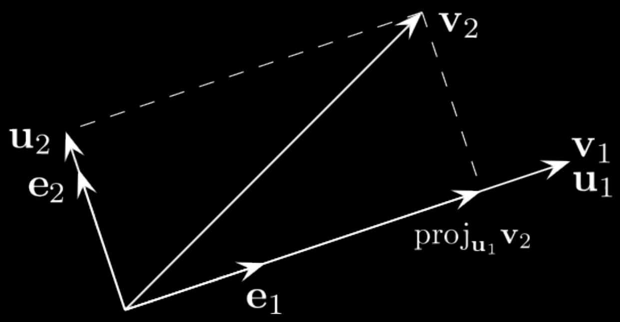
Automne 2024

Version étudiant·e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}^{A}$$



$$A = PDP^{-1}$$

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n - (-1)^n \mathrm{tr}(f) X^{n-1} + \ldots + \det(f)$$

Table des matières

Table des matières

I Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

Définition 1.1. On appelle **intégrale généralisée** ou **intégrale impropre** une intégrale du type

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsqu'on intègre jusqu'à une borne infinie ou lorsqu'on intègre jusqu'à une borne en laquelle la fonction n'admet pas de limite finie.

Exemple 1.2. Les intégrales ci-dessous sont généralisées :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention. On ne peut pas toujours donner une valeur numérique à une intégrale généralisée comme nous le verrons par la suite. Lorsqu'une fonction est positive par exemple, il se peut que l'aire sous sa courbe représentative soit infinie.

Remarque 1.3. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (il s'agit d'une intégrale ordinaire).

I.1 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur $[a;+\infty[$

Dans la suite a désigne un nombre réel.

Définition 1.4. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **convergente**, si la limite $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Si c'est le cas, on note alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

Exemple 1.5. Déterminons la nature de l'intégrale généralisée ci-dessous :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A = -\mathrm{e}^{-A} + \mathrm{e}^{-0} \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que I est convergente et vaut 1.

Remarque 1.6. Dans la plupart des cas, on ne peut pas calculer directement l'intégrale à l'aide d'une primitive. On peut cependant parfois déterminer la nature de l'intégrale sans la calculer comme nous le verrons par la suite.

I.2 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur $]0;b]$

Dans la suite b désigne un réel strictement positif.

Définition 1.7. Soit $f :]0, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **convergente** si la limite $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \int_A^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Si tel est le cas, on note

$$\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to 0^+} \int_A^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

Exemple 1.8. Déterminons la nature de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $A \in]0; 1]$. On a :

$$\int_A^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_A^1 = -\ln(A) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que I est divergente.

Remarque 1.9. Si f est une fonction continue par morceaux sur $]0, b]$ et que f est prolongeable par continuité en 0, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (il s'agit en fait d'une intégrale ordinaire).

1 Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}x$.

I.3 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur $]0; +\infty[$

À l'aide de la relation de Chasles, on justifie la définition de l'intégrale impropre aux deux bornes.

Définition 1.10. Soient f une fonction continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $c \in]0; +\infty[$. Si les intégrales $\displaystyle\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes alors on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **est convergente**, et on pose :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sinon, on dit que l'intégrale est **divergente**.

Remarque 1.11. La définition précédente ne dépend pas du réel c.

II Propriétés de l'intégrale

Dans la suite, I désigne indifféremment un intervalle du type $[a, +\infty[$, $]0, b]$ ou $]0; +\infty[$ et f une fonction réelle définie sur I.

Propriété 1.12 (Linéarité)**.** Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si les intégrales impropres de f et de g sont convergentes, alors l'intégrale impropre de $\lambda f + g$ l'est aussi et :

$$\int_I (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 1.13 (Positivité)**.** Si f est positive ou nulle et que l'intégrale impropre de f est convergente sur I, alors cette intégrale est positive. Autrement dit :

$$f \geqslant 0 \implies \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Propriété 1.14 (Croissance)**.** Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I admettant des intégrales impropres convergentes sur I. Alors :

$$[\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)] \implies \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.15 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;+\infty[$ et soit $c \in [a,+\infty[$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et si elles convergent, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Il suffit d'écrire la relation de Chasles pour les intégrales simples entre a et x et de passer à la limite quand x tend vers $+\infty$. □

Remarque 1.16. Cette relation se généralise de manière naturelle au cas où f est continue par morceaux sur $]0;b]$.

III Critères de convergence pour les fonctions positives

Dans toute la suite, a désigne un réel et f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;+\infty[$. Les résultats vus dans ce paragraphe se généralisent aux fonctions définies sur $]0;b]$ sans difficulté.

III.1 Critère de majoration

Théorème 1.17 (Critère de majoration)

S'il existe $c \in [a;+\infty[$ tel que

$$\forall t \in [c;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t),$$

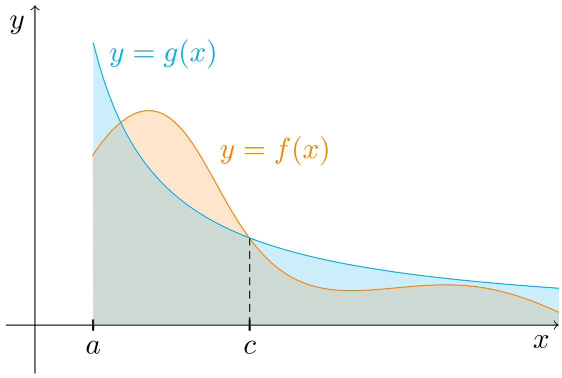
alors :

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque 1.18. Ce théorème s'adapte pour les fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux et négatives au voisinage de l'infini.

Illustration 1.19. Sur l'intervalle $[a, c]$, les fonctions f et g sont continues : leurs intégrales y sont donc convergentes car ordinaires. Il suffit alors de regarder ce qu'il se passe entre c et $+\infty$. On comprend bien sur le dessin ci-dessous que :

- si l'aire en bleu est finie, alors celle en orange l'est aussi (et elle est plus petite),
- si l'aire en orange est infinie, alors celle en bleu l'est aussi.



Exemple 1.20. Étudions la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f\colon t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Il s'agit donc d'étudier la convergence de I en $+\infty$. On remarque que :

$$\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Soit alors $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(\mathrm{A}) - 0 \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que I est convergente et que $I \leqslant \frac{\pi}{2}$.

III.2 Critère d'équivalence

Théorème 1.21 (Critère d'équivalence)

Si f et g sont **de même signe** au voisinage de l'infini et que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exemple 1.22. Étudions la convergence de

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour ce faire, nous allons utiliser le critère d'équivalence en 0 qui s'énonce de manière similaire à celui donné en $+\infty$. On remarque que :

$$\frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}} \sim_0 \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Comme les fonctions en jeu sont toutes positives au voisinage de 0^+, l'intégrale I est de même nature que l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Soit alors $A \in]0,1[$. On remarque que :

$$\int_A^1 \frac{1}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_A^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{A} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 2.$$

On en déduit que I est convergente. Attention cependant, ce raisonnement ne nous donne aucune information sur la valeur de I.

III.3 Intégrales de référence et critère de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence : vous devez connaître le résultat ci-dessous par cœur pour pouvoir déterminer rapidement la convergence de certaines intégrales.

Théorème 1.23 (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge **ssi** $\alpha < 1$.

(ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge **ssi** $\alpha > 1$.

Exemple 1.24. Déterminons la nature de l'intégrale généralisée :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{t^2+t}{2t^4-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

On remarque que :

$$\frac{t^2+t}{2t^4-\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{2t^4} = \frac{1}{2t^2}.$$

Or, d'après le théorème portant sur les intégrales de Riemann, on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, d'après le critère d'équivalence, toutes les fonctions en jeu étant positives au voisinage de l'infini, on peut conclure que I est convergente.

2 Déterminer la nature des intégrales ci-dessous :

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{t}}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_3^{+\infty} \frac{\ln(t) + t\sqrt{t}}{\sqrt{t}-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.25

On a :

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 1.26. On pourra dorénavant utiliser ce résultat sans avoir à la redémontrer.

Proposition 1.27

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 1.28. On pourra utiliser ce résultat sans le démontrer (en particulier le fait que l'intégrale est convergente). Cependant, il est inutile de retenir la valeur de l'intégrale car celle-ci se retrouve très facilement.

Propriété 1.29 (Critère de Riemann)

Soit f une fonction continue par morceaux et **de signe constant** sur $[a;+\infty[$.

(i) Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(ii) Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

3 Déterminer la nature des intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2t+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

IV Intégrales absolument convergentes

Dans la suite I désigne indifféremment un intervalle du type $[a,+\infty[$, $]0,b]$ ou $]0;+\infty[$.

IV.1 Définition et propriétés

Définition 1.30 (Absolue convergence d'une intégrale). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème 1.31 (Inégalité triangulaire)

Une intégrale absolument convergente est convergente. De plus, si l'intégrale de f est absolument convergente sur I, alors :

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Remarque 1.32. Une intégrale peut être convergente sans être absolument convergente. C'est par exemple le cas de l'intégrale de Dirichlet (vu en TD) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4 Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.33 (de convergence dominée (Admis))

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles vérifiant :

(i) pour tout réel $t \in I$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté $f(t)$,

(ii) la fonction f définie pour tout $t \in I$ par $f : t \mapsto f(t)$ est continue par morceaux.

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 1.34. Ce théorème permet d'intervertir les symboles limite et intégrale : on ne peut pas le faire en général. Les deux premiers points à vérifier sont souvent évidents, il faut cependant être particulièrement attentif au troisième : il s'agit de majorer l'intégrande $f_n(t)$ par une fonction intégrable indépendante du paramètre n

Exemple 1.35. Démontrons l'existence et calculons la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^{+\infty} \arctan(nt)\exp(-nt)\,\mathrm{d}t.$$

Commençons par définir pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \quad : \quad \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \arctan(nt)\exp(-nt) \end{array}$$

(i) La fonction arc tangente étant bornée, il est immédiat que :

$$\forall t \in [2,+\infty[, f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii) La fonction $f\colon t \mapsto 0$ est continue par morceaux et intégrable sur $[2,+\infty[$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 2$, on a :

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-t}.$$

Or, cette fonction (qui correspond à φ dans le théorème de convergence dominée) est bien continue par morceaux et intégrable sur $[2,+\infty[$.

Ainsi, les trois hypothèses du théorème sont vérifiées et on peut conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^{+\infty} \arctan(nt)\exp(-nt)\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \arctan(nt)\exp(-nt)\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Intégrales généralisées

Intégrales de référence

Riemann

$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ cv $\iff \alpha < 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ cv $\iff \alpha > 1$

Exponentielle

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$

Logarithme

$\int_0^1 \ln(t)\, dt = -1$

$\lim_{n\to\infty} \int f_n \overset{?}{=} \int \lim f_n$: théorème de convergence dominée

Fonctions de signe constant

Critère d'équivalence

$f \sim g \Rightarrow \int f$ et $\int g$ ont même nature

Critère de comparaison

$0 \leq f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \int f \text{ dv} \Rightarrow \int g \text{ dv} \\ \int g \text{ cv} \Rightarrow \int f \text{ cv} \end{cases}$

Critère de Riemann

En 0 : $\exists \alpha < 1,\ x^\alpha f(x) \longrightarrow 0 \Rightarrow \int f$ cv
$\exists \alpha \geq 1,\ x^\alpha f(x) \longrightarrow +\infty \Rightarrow \int f$ dv

En $+\infty$: $\exists \alpha > 1,\ x^\alpha f(x) \longrightarrow 0 \Rightarrow \int f$ cv
$\exists \alpha \leq 1,\ x^\alpha f(x) \longrightarrow +\infty \Rightarrow \int f$ dv

Fonctions de signe non constant

Convergence absolue

$\int |f|$ cv $\Rightarrow \int f$ cv

Calcul explicite de l'intégrale

recherche d'une primitive sur intégrale ordinaire
- calcul direct
- intégration par parties
- changement de variable

puis passage à la limite

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Déterminant d'une matrice carrée

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.

Théorème 2.1 (Definition de déterminant)

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée **déterminant**, telle que :

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne,

(ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1,

(iii) le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.

Notation 2.2. Cette application est notée det. Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son déterminant est noté de la manière suivante :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Attention. Pour bien différentier déterminant et matrice, on utilisera des traits verticaux pour les déterminants et des parenthèses pour les matrices.

Démonstration. On donne ici une démonstration dans le cas particulier où $n = 2$ en procédant par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit f une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & f(A) = f(C_1 \mid C_2) \end{array}$$

  où on on a noté C_1 et C_2 les colonnes de A. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors :

$$f(A) = f\big(aE_1 + bE_2 \mid cE_1 + dE_2\big) ;$$

  égalité dans laquelle on a posé : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On utilise la linéarité de f par rapport à chaque colonne, il vient :

$$f(A) = ac\, f\big(E_1 \mid E_1\big) + ad\, f\big(E_1 \mid E_2\big) + bc\, f\big(E_2 \mid E_1\big) + bd\, f\big(E_2 \mid E_2\big).$$

  À l'aide du point (ii), on obtient :

$$f\big(E_1 \mid E_1\big) = -f\big(E_1 \mid E_1\big) \implies f\big(E_1 \mid E_1\big) = 0.$$

  De même, $f\big(E_2 \mid E_2\big) = 0$. La relation précédente conduit alors à :

$$f(A) = (ad - bd) f\big(E_1 \mid E_2\big) = (ad - bc) f(I_2) = ad - bd.$$

  On a donc démontré qu'une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant (i), (ii), (iii) est déterminée de manière unique par l'équation ci-dessus.

- **Synthèse.** Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ab - bc \end{array}$$

(i) Soit $(a, b, c, d, u, v) \in \mathbb{K}^6$, on a :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} a+u & c \\ b+v & d \end{pmatrix} &= (a+u)d - c(b+f) \\ &= ad - bc + ud - cv \\ &= f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} u & c \\ v & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire par rapport à la première colonne. On démontre de même que :

$$f\begin{pmatrix} a & u+c \\ b & v+d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a & u \\ b & v \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que f est linéaire par rapport à la seconde colonne.

(ii) Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$:

$$f\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} = cb - ad = -f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'échange de colonnes a pour effet de multiplier la valeur prise par f par -1 : f vérifie bien (ii).

(iii) Enfin : $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$; f vérifie (iii).

- **Conclusion.** Il existe une unique application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant (i), (ii) et (iii) ; on la note det et :

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

□

Propriété 2.3

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Alors :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Remarque 2.4. On peut démontrer que le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est donné par :

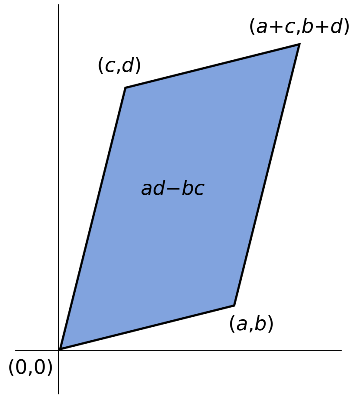
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

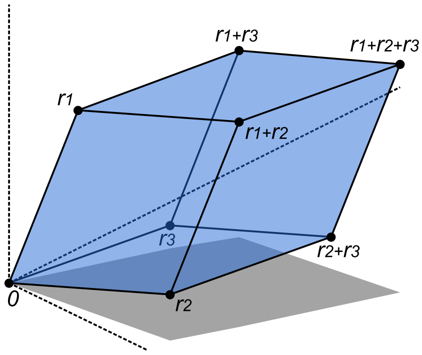
Il existe bien d'autres formules pour calculer un déterminant de cette taille (et de taille supérieure) : plutôt que de les apprendre par cœur, on se référera à la section II.7.

Propriété 2.5 (Interprétation géométrique en dimension 2)**.** Dans le cas où a, b, c et d sont des nombres réels, la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

représente l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $X = (a, b)$ et $X' = (c, d)$ comme l'illustre la figure ci-contre.





Propriété 2.6 (Interprétation géométrique en dimension 3)**.** Dans le cas de nombres réels, la valeur absolue du déterminant formé par les coordonnées des vecteurs colonne r_1, r_2 et r_3 correspond au volume du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs comme l'illustre la figure ci-contre (image empruntée à Wikipédia).

II Propriétés du déterminant

II.1 Deux propriétés fondamentales

Propriété 2.7

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Propriété 2.8

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire λ de $\mathbb{K}$, on a :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

II.2 Effet des opérations élémentaires

Théorème 2.9

Le déterminant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne change pas, si à une colonne de A on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes de A.

5 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

II.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 2.10

Le déterminant d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égal au produit des éléments diagonaux de cette matrice.

Exemple 2.11. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 4 = 12.$$

II.4 Déterminants et matrices inversibles

Théorème 2.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Démonstration. Le sens réciproque est admis et le sens direct sera fait en classe. □

II.5 Déterminant d'un produit de matrices

Théorème 2.13 (Déterminant d'un produit)

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. Admis. □

Corollaire 2.14. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Corollaire 2.15. Deux matrices semblables[1] ont même déterminant.

6 Démontrer les deux corollaires ci-dessus à l'aide du théorème 2.13.

II.6 Déterminant de la transposée d'une matrice carrée

Théorème 2.16 (Déterminant de la transposée)

Une matrice et sa transposée ont même déterminant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \det(A) = \det({}^tA)$$

1. On rappelle que A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Démonstration. Admis. □

Corollaire 2.17

Le déterminant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne change pas si à une ligne de A on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes de A.

II.7 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème 2.18

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}^{A}$$

où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Δ_{kj}^{A} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Théorème 2.19

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}^{A}$$

où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Δ_{ik}^{A} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

Exemple 2.20. On considère le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons-le par rapport à se première colonne :

$$D = +0 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cette opération permet de se ramener à des calculs de déterminants de taille 2×2. Partant d'une matrice de taille n, on peut toujours (en appliquant cette méthode plusieurs fois) se ramener à des déterminants de taille 2×2. Cependant, il convient d'abord de faire des opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour optimiser son calcul.

III Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

III.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Définition 2.21. On appelle **déterminant de la famille** $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans $\mathcal{B}$. On le note $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$.

Remarque 2.22. Si on désigne par $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Théorème 2.23

Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base conserve les propriétés du déterminant vu précédemment :

1. $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ est linéaire par rapport à chaque vecteur u_i.
2. $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ est nul dès que deux vecteurs parmi les u_i sont égaux.
3. L'échange de deux vecteurs dans la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ a pour effet de multiplier le déterminant par -1, c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,
$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n).$$
4. $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ ne change pas si à l'un des u_i, on ajoute une combinaison linéaire des autres.

III.2 Caractérisation des bases

Théorème 2.24

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E,

(ii) $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre de E,

(iii) pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ n'est pas nul,

(iv) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ ne soit pas nul,

Remarque 2.25. On pourra dorénavant calculer directement le déterminant d'une famille de vecteurs pour déterminer si celle-ci forme ou non une base d'un espace vectoriel (de dimension finie).

7 Démontrer que $\big((1,1,2), (1,2,1), (1,0,2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, f un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E

Définition 2.26. Le **déterminant** de f est le déterminant de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de E. On le note $\det(u)$.

Remarque 2.27. Puisque deux matrices semblables ont même déterminant, $\det(f)$ est bien indépendant du choix de $\mathcal{B}$ (il ne dépend que de f).

Théorème 2.28

Si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big).$$

III.4 Caractérisation des automorphismes

Théorème 2.29

Un endomorphisme de E est bijectif si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

III.5 Déterminant et composition

Théorème 2.30

Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors

$$\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g).$$

Corollaire 2.31. Si f est inversible (i.e. bijectif), alors :

$$\det\left(f^{-1}\right) = (\det(f))^{-1} = \frac{1}{\det(f)}.$$

Remarque 2.32. On se rappellera qu'en terme de matrices, la composition des endomorphismes correspond au produit : on retrouve donc ici simplement les propriétés déjà énoncées pour le determinant matriciel.

III.6 Comatrice et inverse d'une matrice carrée

Définition 2.33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A la matrice notée $\mathrm{com}(A)$ de taille $n \times n$ dont le coefficient général est donné par

$$\gamma_{i,j} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}^{A}\right)$$

où Δ_{ij}^{A} est le déterminant de la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ issu de la matrice A et obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple 2.34. Pour déterminer une comatrice, on place à la i-ème colonne et à la j-ième ligne le déterminant obtenu en supprimant la i-ème colonne et la j-ième ligne de cette même matrice. Les entrées sont ensuites affectées d'un signe comme dans l'exemple ci-après :

$$\mathrm{Com}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Propriété 2.35. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A) \times I_n.$$

Corollaire 2.36

Si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A).$$

III.7 Applications à la géométrie

On a déjà vu qu'un déterminant pouvait s'interpréter (en dimension 2 ou 3) comme un volume (au signe près). Sachant que le déterminant d'une famille de vecteurs est nul ssi cette famille est liée, on peut aussi utiliser le déterminant pour trouver des équations de droite ou de plan.

Exemple 2.37. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal. Déterminons l'équation de la droite passant par les points $A = (0,1)$ et $B = (1,3)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le point $M(x,y)$ est sur la droite (AB) ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire ssi le déterminant de ces deux vecteurs est nul. Or :

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1-0 \\ y-1 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - y + 1.$$

On en déduit que l'équation cartésienne de la droite (A,B) est :

$$(AB) \ : \ 2x - y + 1 = 0.$$

Exemple 2.38. Soient $\overrightarrow{u} = (2,0,1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,1,3)$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions. Déterminons l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ engendré par ces deux vecteurs. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur $\overrightarrow{w} = (x,y,z)$ est dans le plan $\mathcal{P}$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une famille liée, c'est-à-dire ssi leur déterminant est nul. Or :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -x + 5y + 2z.$$

On en déduit que l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est :

$$\mathcal{P} \ : \ -x + 5y + 2z = 0.$$

I Généralités

Dans cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de nombres réels.

I.1 Vocabulaire

Définition 3.1 (Série, terme général, sommes partielles). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série** associée à la suite $(u_n)_n$. On la note $\sum u_n$.
- u_n est le **terme général** de la série $\sum u_n$.
- S_n est la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_n$.

Remarques 3.2.
1. Une série est la suite des sommes successives de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une série n'est donc rien d'autre qu'une suite particulière.
2. Lorsque la suite $(u_n)_n$ n'est définie qu'à partir du rang n_0, la série de terme général u_n est alors notée $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.
3. Pour n fixé, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

Définition 3.3 (Convergence d'une série).
- La série $\sum u_n$ de terme général u_n est dite **convergente** si la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles admet une limite **finie**.
- Une série qui ne converge pas est dite **divergente.**
- **Dans le cas où $\sum u_n$ converge, on appelle somme de cette série la limite de la suite $(S_n)_n$ et on la note**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Remarque 3.4. Ne pas confondre les notations $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ (pour la somme partielle), $\sum u_n$ (pour la série) et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (pour sa somme quand elle converge).

Remarque 3.5. Étudier une série consiste donc simplement en l'étude d'une suite, la suite des sommes partielles de (u_n). Le but du reste du chapitre sera de proposer des techniques particulières et des outils spécifiques pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles, comme nous l'avons fait pour les intégrales impropres. Dans certains cas, on reviendra à la définition en étudiant directement la convergence de la suite des sommes partielles ; dans d'autres, l'étude du terme général sera suffisant.

8 Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Déterminer la somme partielle correspondante puis étudier la convergence éventuelle de la série. On pourra remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

I.2 Un exemple fondamental

Proposition 3.6 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La série $\sum q^n$ est appelé série géométrique de raison q. Elle vérifie :

(i) $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

(ii) La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(iii) La série $\sum nq^{n-1}$ s'appelle la série dérivée de la série géométrique de raison q. Cette série converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

I.3 Condition nécessaire de convergence

Propriété 3.7

Si la série $\sum u_n$ est convergente **alors** la suite u_n converge vers zéro.

Remarque 3.8. Cette propriéte est surtout utile grâce à sa contraposée. En effet si u_n ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Attention. La réciproque est **fausse** comme nous le verrons par la suite. Tout comme l'assertion «tout fonction continue est dérivable», l'assertion «$u_n \to 0$ donc $\sum u_n$ converge» est à proscrire de vos copies si vous ne voulez pas vous attirer les foudres de votre correcteur !

Définition 3.9. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente.**

Exemple 3.10. La série de Grandi $\sum(-1)^n$ est grossièrement divergente.

I.4 Séries téléscopiques

Exemple 3.11. Démontrons que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente et calculons sa somme. Soit $N \geqslant 2$ un entier. Alors :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge et vaut 1.

I.5 Linéarité de la somme et reste en cas de convergence

Propriété 3.12. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit λ un nombre réel. Alors, la série $\sum \lambda u_n + v_n$ est convergente et sa somme est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Attention. Il se peut que la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge sans que $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ soient convergentes.

9 Illustrer la remarque précédente avec un exemple numérique simple.

I.6 Reste d'ordre n

Définition 3.13. Soit $\sum u_n$ une série convergente et s sa somme. Le reste R_n d'ordre n de la série est défini par :

$$R_n = s - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 3.14. Cette définition n'a de sens que si la série $\sum u_n$ est convergente.

Propriété 3.15. Soit $(R_n)_n$ la suite des restes d'une série convergente $\sum u_n$. Alors :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = R_{n-1} - R_n$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

I.7 Relative importance des premiers termes

Propriété 3.16

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $n_0 \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalents :

(i) la série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,

(ii) la série associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente.

Remarque 3.17. Cette propriété signifie que la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite. Cependant, en cas de convergence, la valeur de la somme dépend évidemment de tous les termes.

II Séries à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ seront des suites réelles positives.

II.1 Caractérisation de la convergence

Propriété 3.18. Si $(u_n)_n$ est une suite positive alors la série $\sum u_n$ est croissante.

Démonstration. Il suffit de constater que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

Propriété 3.19. Soit $(u_n)_n$ une suite **positive**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sum u_n$ converge,

(ii) $(S_n)_n$, la suite des sommes partielles, est majorée.

Remarque 3.20. Une série dont la suite $(S_n)_n$ est bornée n'est pas nécessairement convergente si le terme général n'est pas positif, comme le montre la série de Grandi $\sum(-1)^n$.

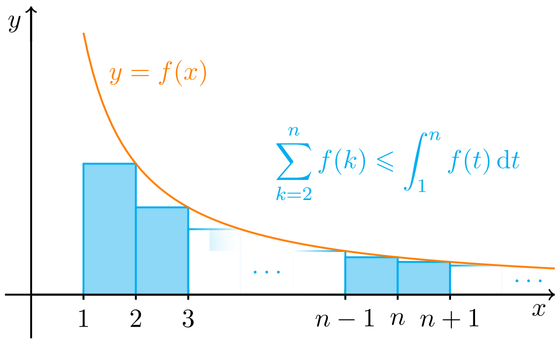
II.2 Comparaison série intégrale

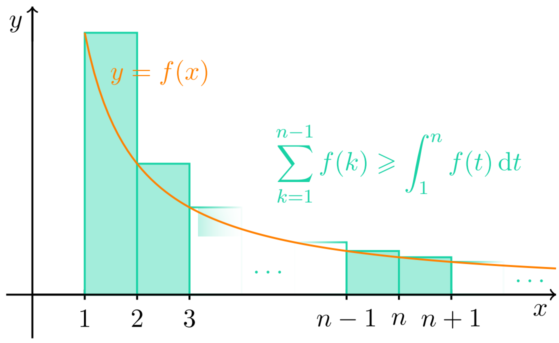
Théorème 3.21 (Comparaison série-intégrale)

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue et décroissante. Alors :

$$\sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Illustration 3.22. La fonction f de l'énoncé étant décroissante, on peut minorer (respectivement majorer) l'aire sous la courbe représentative de f par l'aire obtenue via la méthode des rectangles à droite (respectivement à gauche). Sur les figures ci-dessous on a pris $n_0 = 1$.





II.3 Série de Riemann

Propriété 3.23 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Remarque 3.24. On peut démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Cependant, contrairement aux intégrales de Riemann que l'on sait calculer, on ne connaît la valeur des sommes de Riemann que pour α entier pair plus grand que 2.

II.4 Critère de convergence pour les séries à termes positifs

Propriété 3.25 (Critère de majoration)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Alors :

- si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$,
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Remarque 3.26. Cette propriété reste vraie si u_n est majorée par v_n à partir d'un certain rang. Cependant en cas de convergence, on ne peut plus comparer la valeur des sommes.

10 Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{\ln n}{n2^n}$.

Propriété 3.27 (Critère d'équivalence)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **positives**. Si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de mêmes natures.

11 Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{2n^2+3n-\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n}+\ln(n)}$.

Remarque 3.28. Ces 2 propriétés s'adaptent si les suites (u_n) et (v_n) sont négatives au voisinage de l'infini.

II.5 Règle de d'Alembert

Propriété 3.29 (Règle de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite qui ne s'annule pas au voisinage de l'infini et telle que :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Alors :

(i) si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
(ii) si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.
(iii) si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

II.6 Critère de Riemann

Propriété 3.30 (Critère de Riemann)

Soit (u_n) une suite **positive**.

(i) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque 3.31. Toute l'étude faite dans la section II s'applique aussi aux séries à termes négatifs, en adaptant les énoncés. Plus généralement, elle s'applique à toute série réelle dont les termes sont de signe constant à partir d'un certain rang.

III Séries à termes de signe quelconque

Dans ce paragraphe, $(u_n)_n$ sera une suite quelconque de réels.

III.1 Convergence absolue

Définition 3.32. Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge.

Propriété 3.33

Une série absolument convergente est convergente et dans ce cas on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Exemple 3.34. Si $|z| < 1$ alors la série géométrique $\sum z^n$ est absolument convergente.

Remarque 3.35. La réciproque de la proposition 3.33 est fausse : la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais non absolument convergente.

Théorème 3.36

Pour tout réel x, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Cette série est appelé série exponentielle.

III.2 Séries alternées

Définition 3.37. On dit qu'une série réelle $\sum u_n$ est **alternée** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$. Autrement dit, la suite change de signe terme après terme.

Remarque 3.38. Toute série alternée s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n u_n$ avec $u_n \geqslant 0$.

Attention. $\sum (-1)^n \cos(n)$ n'est pas alternée. De même, $\sum (-1)^n x^n$ n'est pas alternée lorsque $x < 0$.

Théorème 3.39 (Critère spécial des séries alternées)

Soit $\sum u_n$ une série telle que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$ (i.e. $\sum u_n$ est alternée),

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \leqslant |u_n|$,

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Alors, $\sum u_n$ converge. De plus, le reste d'ordre n est du signe de u_{n+1} et vérifie

$$|R_n| := \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Remarque 3.40. En pratique, pour montrer qu'une série du type $\sum (-1)^n u_n$ vérifie ce critère, il suffit de montrer que :

(i) $(u_n)_n$ est décroissante,

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

12 Étudier la nature des séries de Riemann alternées $\sum\limits_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$. en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Séries numériques

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ alors $\sum_n u_n$ diverge

Séries de référence

Riemann	$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ cv $\iff \alpha > 1$
Exponentielle	$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
Géométrique	$\forall q \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
Géométrique dérivée	$\forall q \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Séries de signe constant

Critère d'équivalence

$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature

Critère de comparaison

$0 \leq u_n \leq v_n \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n \text{ dv} \Rightarrow \sum v_n \text{ dv} \\ \sum v_n \text{ cv} \Rightarrow \sum u_n \text{ cv} \end{cases}$

Critère de Riemann

$\exists \alpha > 1,\ n^\alpha u_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \sum u_n$ cv

$\exists \alpha \leq 1,\ n^\alpha u_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum u_n$ dv

Comparaison à une intégrale

$f \geq 0$ continue $\searrow$ $\Rightarrow \sum f(n)$ et $\int^{+\infty} f$ ont même nature

n'a d'intérêt que si on sait primitiver f

Critère de Cauchy

Si $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$ alors : $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv ; $\ell = 1 \Rightarrow$? ; $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ dv

Séries de signe non constant

Convergence absolue

$\sum |u_n|$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv

Séries alternées

$(a_n)_n$ décroissante de limite nulle $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ cv

Règle de d'Alembert

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell$ alors : $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv ; $\ell = 1 \Rightarrow$? ; $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ dv

Calcul explicite de la somme / de la somme partielle

Séries télescopiques

Séries de référence

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Éléments propres

I.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définitions 4.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de l'endomorphisme f si :

$$\exists u \in E, \quad u \neq 0_E \text{ et } f(u) = \lambda u.$$

Lorsqu'un tel vecteur u existe, il est appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

Définition 4.2. On appelle **spectre** d'un endomorphisme f et on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

13 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = (X-1)P' + P$. On pose $R(X) = (X-1)^2$. Calculer $f(R)$ et en déduire une valeur propre de f.

Théorème 4.3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) λ est une valeur propre de f

(ii) $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective.

Remarque 4.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. D'après le théorème précédent, 0 est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective.

Remarque 4.5. Cette caractérisation est le principal outil de recherche des valeurs propres en dimension finie. En effet, en dimension finie, un endomorphisme est injectif ssi il est bijectif. Ainsi, on a le résultat fondamental suivant.

Propriété 4.6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0.$$

Définition 4.7. Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ et on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{id}_E\right) = \left\{u \in E,\ f(u) = \lambda u\right\}.$$

Théorème 4.8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Alors, les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont en somme directe.

Corollaire 4.9. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Alors, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Corollaire 4.10

Une somme finie de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Corollaire 4.11. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n valeurs propres **distinctes** et si $u_1, \dots, u_n$ sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E. On dit que c'est une **base de vecteurs propres**.

Corollaire 4.12

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.

I.2 Éléments propres d'une matrice

Soient n un entier plus grand que 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Définitions 4.13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de la matrice A si :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X.$$

Lorsqu'une telle matrice colonne X existe, on parle encore de **vecteur propre** X de A associé à la valeur propre λ.

Remarque 4.14. Si f désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A, alors cela revient à dire que λ est une valeur propre de f et que X est un vecteur propre associé à λ au sens des définitions 4.1.

Propriété 4.15

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de A,

(ii) La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible,

(iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

14 Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Définition 4.16. Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ et on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\, AX = \lambda X\}.$$

Propriété 4.17

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E et $u \in E$. Alors, il y a équivalence entre :

(i) u est un vecteur propre de f.

(ii) $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un vecteur propre de A.

II Polynômes

II.1 Polynômes d'endomorphismes

Rappel 4.18. Soient f un endomorphisme de E et $p \in \mathbb{N}$. On définit f^p par $f^0 = \mathrm{id}_E$ et lorsque p est non nul :

$$f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

Définition 4.19. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Si f est un endomorphisme de E, alors on note $P(f)$ l'endomorphisme définie par :

$$\forall u \in E, \quad P(f)(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^p(u).$$

Définition 4.20. On définit de la même manière $P(A)$ lorsque A est une matrice carrée, c'est-à-dire, avec les mêmes notations :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^p.$$

15 Soient f un endomorphisme de E, λ un scalaire et u un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Simplifier $P(f)(u)$.

II.2 Polynômes annulateurs

Définition 4.21. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de f si $P(f) = 0$.

Définition 4.22. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $P(A) = 0$.

Exemple 4.23. Soit p un projecteur, c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$, ou encore [1] $p^2 = p$. Alors, $p^2 - p = 0$. Autrement dit, le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p.

16 Soit s une symétrie, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Déterminer un polynôme annulateur de s.

1. Attention ! Ici la notation p^2 correspond à la composition, i.e. $p^2(u) = p(p(u))$ et non $p^2(u) = (p(u))^2$. En général, on ne peut pas multiplier des vecteurs ce qui implique que $(p(u))^2$ n'a pas de sens. Il n'y a donc pas d'ambigüité à utiliser cette notation.

Propriété 4.24

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de f. Alors, toute valeur propre de f est une racine de P.

Remarque 4.25. La même propriété est vraie pour les matrices : si P est annulateur de A alors toute valeur propre de A est une racine de P.

Attention. La réciproque est fausse ! Par exemple, nous verrons par la suite que la seule valeur propre de la matrice identité est 1, pourtant $P(X) = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de cette matrice.

II.3 Polynôme caractéristique

Définition 4.26. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme :

$$\chi_f(X) = \det(f - X\mathrm{id}_E).$$

Définition 4.27. Le **polynôme caractéristique** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté χ_A est le polynôme :

$$\chi_A(X) = \det\left(A - XI_n\right).$$

Propriété 4.28

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est le polynôme caractéristique de sa matrice dans n'importe quelle base.

17 Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+y, x-y).$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. Déterminer le polynôme caractéristique χ_f de f.

Proposition 4.29

Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme (ou d'une matrice) sont ses valeurs propres.

Corollaire 4.30. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) se lisent sur la diagonale. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre correspond alors au nombre de fois que celle-ci apparaît sur la diagonale.

Remarque 4.31. Pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice, il suffit donc de déterminer les racines du polynôme caractéristique associé.

18 Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Remarque 4.32. Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$. Une telle matrice admet au maximum n valeurs propres deux à deux distinctes.

Propriété 4.33

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) λ est une valeur propre de A,

(ii) λ est une racine du polynôme caractéristique de A,

(iii) λ est une valeur propre de l'endomorphisme f ayant comme matrice A dans une base $\mathcal{B}$,

(iv) λ est une valeur propre de tout endomorphisme f de E admettant A comme matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Remarque 4.34. Cette propriété est basée sur le fait que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Propriété 4.35. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $XI_n - {}^tA = {}^t(A - XI_n)$ et d'utiliser le fait que

$$\det({}^t(A - XI_n)) = \det(A - XI_n).$$

On a donc bien $\chi_{{}^tA} = \chi_A$. □

Remarque 4.36. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$.

II.4 Ordre de multiplicité

Dans toute cette section, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 4.37. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, χ_f son polynôme caractéristique et λ une valeur propre de f. On appelle **ordre de multiplicité** de λ et on note $m_f(\lambda)$ (ou $m(\lambda)$) son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f.

Définition 4.38. On définit de la même manière l'ordre de multiplicité d'une valeur propre pour une matrice.

Théorème 4.39

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre dont l'ordre de multiplicité est $m(\lambda)$. Alors, on a l'encadrement suivant :

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant m(\lambda) \leqslant n,$$

où $E_\lambda(f)$ désigne de le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Remarque 4.40. Ce résultat reste vrai pour une matrice.

Exemple 4.41. On peut montrer que le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -6 & 9 & -6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

est $\chi_A(X) = X(X-3)^2$. Les valeurs propres de A sont donc 0 d'ordre de multiplicité 1 et 3 d'ordre de multiplicité 2. En particulier,

$$\dim(E_0(A)) = 1 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \dim(E_2(A)) \leqslant 2.$$

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

À partir de cette section et jusqu'à la fin du chapitre, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

III.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 4.42. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Définition 4.43. On dit qu'une matrice A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque 4.44. En considérant l'endomorphisme canoniquement associé à A, la définition précédente est équivalente à celle donnée pour un endomorphisme.

Exemple 4.45. La matrice I_n est diagonalisable car diagonale. De manière équivalente, l'endomorphisme id_E est diagonalisable.

III.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 4.46

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable,

(ii) il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f,

(iii) La somme des sous espaces propres de f est égale à E,

(iv) Le polynôme caractéristique de f est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Remarque 4.47. Ce résultat s'applique aussi aux matrices.

III.3 Condition suffisante de diagonalisation

Propriété 4.48

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples alors f est diagonalisable

Corollaire 4.49. Si $\dim E = n$ et que f admet n racines propres distinctes alors f est diagonalisable.

Remarque 4.50. Ces résultats s'appliquent aussi aux matrices.

Proposition 4.51

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

III.4 Exemple de diagonalisation d'une matrice

Propriété 4.52. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A. On note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i. Alors on a $A = PDP^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ à la base de vecteurs propres et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Lorsqu'on construit les matrices P et D on dit que l'on **diagonalise** A.

Méthode (Diagonalisation d'une matrice). Pour déterminer la diagonalisibilité éventuelle d'une matrice et la digonaliser le cas échéant, on procède en plusieurs étapes.

1. On commence par chercher les valeurs propres de A : on calcule χ_A et on résout $\chi_A(X) = 0$.
2. On détermine ensuite si A est diagonalisable.
   - Si χ_A n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que A admet n valeurs propres distinctes alors on peut conclure à la digonalisibilité de A sans d'avantage de calcul.
   - Sinon, on cherche une base des sous-espaces propres associés aux valeurs propres multiples et si leurs dimensions correspondent aux ordres de multiplicité alors A est diagonalisable, sinon elle ne l'est pas.
3. Si A est diagonalisable, on construit P et D :
   - les vecteurs colonne de P sont la juxtaposition des bases de vecteurs propres,
   - la matrice diagonale D a sur sa diagonale les valeurs propres de A mises dans le même ordre que celui choisi pour P.

Attention. Il est très important d'essayer de déterminer χ_A directement sous une forme factorisée (en travaillant sur les lignes et les colonnes avant de faire des développements) : cela permettra de trouver rapidement les valeurs propres de A.

Exemple 4.53. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Cherchons les valeurs propres de A en calculant son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 2 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 2 & X \end{vmatrix} = (X-2)(X^2 - 3X + 2).$$

   Après calcul, on trouve :

$$\chi_A(X) = (X-2)(X-1)(X-2) = (X-2)^2(X-1).$$

   Les valeurs propres de A sont donc 1 (d'ordre de multiplicité 1) et 2 d'ordre de multiplicité 2. À ce stade, on ne peut pas conclure à la digonalisibilité de la matrice car il se peut que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 soit de dimension 1.

2. Pour savoir si A est diagonalisable, il suffit de calculer $\dim(E_2(A))$. À cet effet, posons :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

   Alors :

$$AX = 2X \iff \begin{cases} 3x + z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ -2x = 2z \end{cases} \iff z = -x$$

   On reconnaît une équation de plan : $E_2(A)$ est donc bien de dimension 2 et A est diagonalisable.
3. Pour diagonaliser A, cherchons maintenant des bases des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2. D'après le calcul qui précède :

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ z = -x\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

   Le même type de calcul mène à

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

   On peut maintenant donner des matrices P et D qui découlent de ce calcul :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   On a alors $A = PDP^{-1}$.

Remarque 4.54. On aurait pu échanger les colonnes de la matrice P dans l'exemple précédent, il aurait alors fallu échanger l'ordre des valeurs propres dans la matrice diagonale.

Remarque 4.55. Il y a une infinité de choix pour P et D lorsque A est diagonalisable, puisqu'il y a une infinité de choix de bases pour les sous-espaces propres.

Remarque 4.56. Diagonaliser une matrice consiste à trouver une matrice de passage P ainsi qu'une matrice diagonale D. En aucun cas il ne faut calculer P^{-1}, à moins que l'exercice ne le demande spécifiquement.

IV Applications de la réduction

IV.1 Puissances de matrice

Propriété 4.57. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}.$$

Démonstration. C'est une simple récurrence (exercice). □

Rappel 4.58. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

On comprend alors bien l'intérêt de diagonaliser une matrice pour pouvoir calculer ses puissances.

IV.2 Suites récurrentes linéaires

Méthode. Pour déterminer le terme général d'une suite récurrente (ou de plusieurs suites récurrentes croisées), on essayera d'écrire la relation de récurrence sous forme matricielle. Souvent, un simple calcul de puissance de matrice permettra alors de conclure.

Remarque 4.59. Les exercices sur les suites récurrentes linéaires étant guidés, on se contentera de donner ici un exemple de résolution (très succinct) ainsi qu'un exercice qui sera corrigé en classe.

Exemple 4.60. On considère la suite $(u_n)_n$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n. \end{cases}$$

Pour déterminer le terme général de cette suite, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

de sorte que la relation de récurrence définissant $(u_n)_n$ puisse se réécrire sous forme matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X_n.$$

On démontre alors par une récurrence simple que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0,$$

où A est la matrice trouvée précédemment. Pour terminer la résolution, il suffit alors de calculer les puissances de A, ce que l'on fera en la diagonalisant lorsque cela sera possible.

19 Déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n, \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n. \end{cases}$$

IV.3 Système d'équations différentielles

Exemple 4.61. Considérons le système différentiel suivant :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x_1' &= 3x_1 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3' &= -2x_1 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$(S) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}$$

On a vu à l'exemple 4.53 comment diagonaliser la matrice A. On avait alors trouvé $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$(S) \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY,$$

où on a posé $Y = P^{-1}X$. Si on note $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$, alors le système différentiel s'écrit finalement sous une forme simple à résoudre :

$$(S) \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

Pour terminer la résolution, il ne reste plus qu'à déterminer Y puis à se souvenir que $X = PY$.

Remarque 4.62. Pour résoudre un système différentiel comme dans l'exemple précédent, à aucun moment il n'est nécessaire de calculer P^{-1}, il est donc inutile de perdre son temps à le faire.

Remarque 4.63. Dans le cas où la matrice du système est diagonalisable, les exercices de ce type ne seront pas guidés, il vous est donc demandé de retenir la méthode présentée ci-dessus.

IV.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient a et b deux nombres réels et soit $(u_n)_n$ une suite définie par ses deux premiers termes et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Une telle suite est dite **récurrence linéaire d'ordre 2** et son **polynôme caractéristique** est le polynôme $X^2 - aX - b$.

Théorème 4.64

Soit $(u_n)_n$ une suite récurrence linéaire d'ordre 2 et P son polynôme caractéristique.

(i) Si P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors,

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n.$$

(ii) Si P admet une racine double r alors

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\lambda+\mu n)\,r^n.$$

(iii) Si P admet deux racines complexes conjuguées $r\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ alors

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta))\,r^n.$$

Réduction d'endomorphismes

Diagonalisabilité de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A symétrique réelle
diagonalisable

Polynôme caractéristique

- Pas scindé
  non diagonalisable
- Scindé à racines simples
  (n valeurs propres distinctes)
  diagonalisable
- Scindé à racine(s) multiple(s)
  diagonalisable $\iff \forall \lambda$ v.p. $m(\lambda) = \dim(E_\lambda)$

Diagonalisation : $A = PDP^{-1}$

- P : matrice constituée des vecteurs propres en colonne
- D : matrice diagonale avec les valeurs correspondantes
- P^{-1} : sauf mention contraire, ne pas la calculer

Résolution d'un système différentiel

(S) : $X' = AX$ $\quad (A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

- On diagonalise A : $A = PDP^{-1}$
- On remplace : $(S) \iff X' = PDP^{-1}X$
- On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $(S) \iff Y' = DY$
- On résout les équations $y_i' = \lambda y_i$
- On écrit $X = PY$ pour conclure

Étude de suites récurrentes linéaires

$\forall n \in \mathbb{N}, \ X_{n+1} = AX_n \quad (A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

- On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = A^n X_0 \underset{!}{\neq} X_0 A_n$
- On diagonalise A : $A = PDP^{-1}$ et on calcule P^{-1}
- On calcule $A^n = PD^nP^{-1}$
- On effectue le calcul matriciel : $X_n = PD^nP^{-1}X_0$

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie ou infinie).

I Produit scalaire et norme

I.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 5.1. On dit qu'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** sur E si elle est

- bilinéaire :

$$\forall (u,v,w) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} \langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \end{cases}$$

- symétrique :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

- définie :

$$\forall u \in E, \quad \big(\langle u, u \rangle = 0 \implies u = 0_E \big)$$

- positive :

$$\forall u \in E, \quad \langle u, u \rangle \geqslant 0.$$

Remarque 5.2. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v se note aussi $(u|v)$ ou encore $u \cdot v$.

Définitions 5.3. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace préhilbertien réel**. Lorsque E est de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

Définition 5.4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Le produit scalaire **canonique** sur $\mathbb{R}^n$ est défini pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\langle u|v \rangle = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Propriété 5.5. L'application définie ci-dessus est un produit scalaire au sens de la définition 5.1.

20 Démontrer que l'application ci-dessous est un produit scalaire :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathscr{C}([0,1]) \times \mathscr{C}([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ & & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

21 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application sur $E \times E$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

Démontrer que φ est un produit scalaire.

22 L'application ci-dessous définit-elle un produit scalaire ?

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \big(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)\big)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

I.2 Norme et distance euclidiennes

Définition 5.6. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$, l'application :

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & u & \mapsto & \sqrt{\langle u|u\rangle} \end{array}$$

23 Calculer la norme du vecteur $u = (1, 2, 5)$ de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Définition 5.7. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On dit que $u \in E$ est **unitaire** si $\|u\| = 1$.

Définition 5.8. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle **distance euclidienne** associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$, l'application, notée $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$, de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad d(u, v) = \|v - u\|.$$

24 Calculer la distance euclidienne canonique entre $u = (1, 2, 5)$ et $v = (1, 1, 1)$.

I.3 Propriétés

Propriété 5.9 (Identités remarquable)**.** Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors, pour tout $(u, v) \in E^2$ on a :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u|v\rangle + \|v\|^2 \quad \text{et} \quad \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u|v\rangle + \|v\|^2.$$

Propriété 5.10 (Identités de polarisation)**.** Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors, pour tout $(u, v) \in E^2$ on a :

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

Propriété 5.11 (Identité du parallélogramme)**.** Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors, pour tout $(u, v) \in E^2$ on a :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

25 Démontrer tout ou partie des trois propriétés ci-dessus.

Théorème 5.12 (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors, pour tout $(u, v) \in E^2$ on a :

$$|\langle u|v\rangle| \leqslant \|u\| \times \|v\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Remarque 5.13. La principale utilisation de ce résultat est la démonstration de certaines inégalités. Il faut alors bien choisir le produit scalaire et les vecteurs auxquels on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

26 Démontrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a+b+c)^2 \leqslant 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Propriété 5.14

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Alors :

(i) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$,

(ii) $\forall u \in E, \quad (\|u\| = 0 \implies u = 0_E)$,

(iii) $\forall (u, v) \in E^2, \quad \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

II Orthogonalité

Dans toute la suite du chapitre $(E, \langle . | . \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

II.1 Définitions

Définition 5.15. Soient u et v deux vecteurs de E. On dit qu'ils sont **orthogonaux** si $\langle u | v \rangle = 0$. On note alors $u \perp v$.

27 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$. On définit sur E un produit scalaire en posant :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont orthogonales pour ce produit scalaire.

Définition 5.16. On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **orthogonale** si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

Définition 5.17. On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires (de norme égale à 1).

28 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale.

Définition 5.18. Soit $u \in E$ et A une partie non vide de E. On dit que u **est orthogonal à** A si

$$\forall a \in A, \quad u \perp a.$$

Définition 5.19. On dit que deux parties non vides A et B de E sont **orthogonales** si

$$\forall (a, b) \in A \times B \quad a \perp b.$$

On note alors $A \perp B$.

Définition 5.20. Soit A une partie non vide de E. On appelle **orthogonal de** A l'ensemble :

$$A^{\perp} = \{u \in E, \, \forall a \in A, \langle u, a\rangle = 0\}.$$

29 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, déterminer $F^{\perp}$ où $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,2)\right)$.

II.2 Propriétés

Propriété 5.21. Une famille orthogonale $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre.

Théorème 5.22 (Théorème de pythagore)

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors :

$$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2.$$

Propriété 5.23

Soit A une partie non vide de E. Alors $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 5.24

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

(i) $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$,

(ii) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

Remarque 5.25. Il se peut que l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ soit stricte.

Propriété 5.26

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. Alors un vecteur u de E est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$u \in F^{\perp} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \langle u | e_i\rangle = 0.$$

II.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété 5.27. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant :

(i) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$

(ii) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_n | \varepsilon_n\rangle > 0$.

Remarque 5.28. Cette propriété n'est pas à retenir. Il faut cependant être capable de déterminer la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ en question en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt présenté ci-après.

Méthode (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Pour construire une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ qui engendre le même espace que $(e_1, \dots, e_n)$, on procède par étapes.

- On pose $e_1' = e_1$.
- On cherche e_2' sous la forme $e_2' = e_2 - \lambda e_1'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie $\langle e_1' | e_2' \rangle = 0$.
- On cherche e_3' sous la forme $e_3' = e_3 - \alpha e_1' - \beta e_2'$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $\begin{cases} \langle e_3' | e_1' \rangle = 0, \\ \langle e_3' | e_2' \rangle = 0. \end{cases}$
- On recommence autant de fois que nécessaire. La famille $(e_1', \dots, e_n')$ ainsi obtenue est orthogonale.
- On définit alors une base orthonormale en posant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \varepsilon_k = \frac{e_k'}{\|e_k'\|}.$$

Exemple 5.29. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y - z - t = 0\}$. Déterminons une base orthonormée de F. Pour ce faire, on commence par remarquer que :

$$F = \left\{(y + z + t, y, z, t)/(y, z, t) \in \mathbb{R}^3\right\} = \operatorname{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\right),$$

et que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ est une base de F. Appliquons alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$.

- On pose $e_1' = e_1 = (1, 1, 0, 0)$.
- On cherche e_2' sous la forme $e_2' = e_2 - \lambda e_1' = (1 - \lambda, -\lambda, 1, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et on trouve λ grâce à la condition $\langle e_2' | e_1' \rangle = 0$:

$$\langle e_2' | e_1' \rangle = 0 \iff 1 - \lambda - \lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2}.$$

  On pose donc $e_2' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.
- On cherche maintenant e_3' sous la forme $e_3' = e_3 - \alpha e_1' - \beta e_2'$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On trouve α et β grâce aux conditions $\langle e_3' | e_1' \rangle = 0$ et $\langle e_3' | e_2' \rangle = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \langle e_3' | e_1' \rangle = 0 &\iff \left\langle \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2}, -\alpha + \frac{\beta}{2}, -\beta, 1\right) \middle| (1, 1, 0, 0) \right\rangle = 0 \\ &\iff 1 - \alpha - \frac{\beta}{2} - \alpha + \frac{\beta}{2} = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned} \langle e_3' | e_2' \rangle = 0 &\iff \left\langle \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2}, -\alpha + \frac{\beta}{2}, -\beta, 1\right) \middle| \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \right\rangle = 0 \\ &\iff \beta = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

  On pose donc $e_3' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

- La base obtenue précédemment est orthogonale. On la rend orthonormale en divisant chaque vecteur par sa norme. On pose donc finalement :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$
$$\varepsilon_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

  La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée de F.

II.4 Bases orthonormales

Propriété 5.30. Tout espace euclidien (préhilbertien de dimension finie) admet une base orthonormale.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. □

Propriété 5.31

Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E. Soit encore $u \in E$ de coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u_i = \langle u|\varepsilon_i\rangle.$$

Autrement dit, $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u|\varepsilon_i\rangle \varepsilon_i$ et en particulier $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u|\varepsilon_i\rangle^2$.

III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On notera $n = \dim(F)$.

III.1 Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale

Définition 5.32. Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont supplémentaires et on note $E = F \oplus G$ si :

$$F \cap G = \{O_E\} \quad \text{et} \quad E = F + G.$$

Autrement dit, F et G sont supplémentaires lorsque tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme $u = u_F + u_G$ avec $(u_F, u_G) \in F \times G$.

III.2 Projection orthogonale

Théorème 5.33 (Définition du projeté orthogonal)

Soit u un vecteur de E. Alors, il existe un unique vecteur de F, noté $p_F(u)$ vérifiant :

(i) $p_F(u) \in F$,

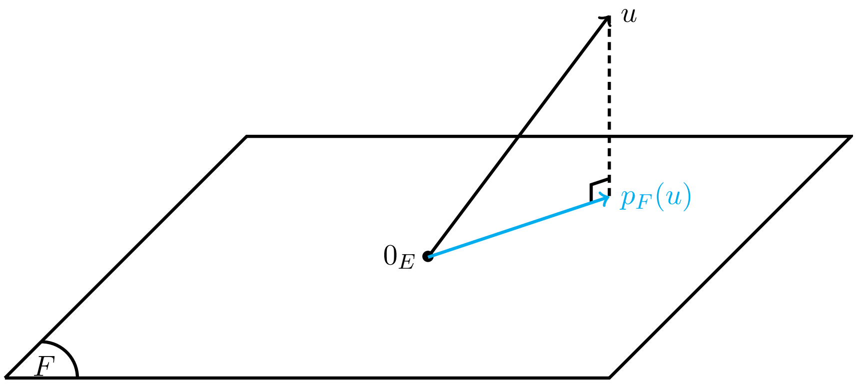
(ii) $u - p_F(u) \in F^{\perp}$.

De plus, si $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormale de F, alors

$$p_F(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u|\varepsilon_i \rangle \, \varepsilon_i.$$

Le vecteur $p_F(u)$ est appelé le **projeté orthogonal** de u sur F et l'application p_F est appelée **projecteur orthogonal** sur F.

Illustration 5.34. Sur la figure ci-dessous, $E = \mathbb{R}^3$ et F est un plan vectoriel (i.e. un plan qui passe par l'origine).



On constate que $u - p_F(u)$ et $p_F(u)$ sont orthogonaux. On verra plus loin que le chemin le plus court entre u et le plan F est celui représenté en pointillés.

Corollaire 5.35

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires. Ainsi, tout vecteur u de E s'écrit :

$$u = p_F(u) + (u - p_F(u)), \quad \text{où } (p_F(u), u - p_F(u)) \in F \times F^{\perp}.$$

En particulier, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u)\|^2.$$

Attention. Ces résultats sont faux en dimension infinie.

Corollaire 5.36. Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**. Alors, $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exemple 5.37. Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné dans l'exemple 5.29. Déterminons la matrice de la projection orthogonale sur F relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

- **Première méthode.** Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt nous avait permis d'écrire :

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-y-z-t=0\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)}_{\varepsilon_1},\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)}_{\varepsilon_2},\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\varepsilon_3}\right). \end{aligned}$$

D'après le théorème 5.33, on sait que :

$$\forall i\in[\![1,4]\!],\quad p_F(e_i)=\langle e_i|\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1+\langle e_i|\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2+\langle e_i|\varepsilon_3\rangle\varepsilon_3.$$

Il ne reste alors plus qu'à faire quelques calculs pour construire la matrice de p_F. On obtient :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&-1&-1\\1&-1&3&-1\\1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

- **Deuxième méthode.** La méthode précédente fait appel à une base orthonormée de F. Or, si on ne connaît pas de base orthonormée de F, en calculer une à l'aide du procédé de Gram-Schmidt peut être chronophage. Voyons ici une autre solution. On a toujours :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x-y-z-t=0\} \\ &= \operatorname{Vect}\Big(\underbrace{(1,1,0,0)}_{u_1},\underbrace{(1,0,1,0)}_{u_2},\underbrace{(1,0,0,1)}_{u_3}\Big). \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{C}=(u_1,u_2,u_3)$. Alors $\mathcal{C}$ est une base de F qui n'est pas orthonormée. On sait que :

$$\forall u\in\mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} p_F(u)\in F, \\ u-p_F(u)\in F^\perp. \end{cases}$$

Soit maintenant $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et notons $p_F(u)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. D'une part :

$$p_F(u)\in F \iff \alpha-\beta-\gamma-\delta=0.$$

D'autre part :

$$u-p_F(u)\in F^\perp \iff \begin{cases}\langle u-p_F(u)|u_1\rangle=0\\ \langle u-p_F(u)|u_2\rangle=0\\ \langle u-p_F(u)|u_3\rangle=0\end{cases} \iff \begin{cases}x-\alpha+y-\beta=0\\ x-\alpha+z-\gamma=0\\ x-\alpha+t-\delta=0\end{cases}$$

On obtient donc un système de quatre équations à quatre inconnues. On sait que ce système admet une unique solution par propriété du projeté orthogonal. Il reste donc à résoudre le système. Un rapide calcul donne :

$$\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma-\delta=0\\ x-\alpha+y-\beta=0\\ x-\alpha+z-\gamma=0\\ x-\alpha+t-\delta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\frac{1}{4}\,(3x+y+z+y)\\ \beta=\frac{1}{4}\,(x+3y-z-t)\\ \gamma=\frac{1}{4}\,(x-y+3z-t)\\ \delta=\frac{1}{4}\,(x-y-z+3t)\end{cases}$$

ce qui permet de construire la matrice demandée.

III.3 Distance à un sous-espace

Définition 5.38. Soit A une partie non vide de E et $u \in E$. On appelle **distance de** u **à** A et on note $\mathrm{d}(u, A)$ le réel :

$$\mathrm{d}(u, A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(u, a) = \inf_{a \in A} \|a - u\|.$$

Théorème 5.39

Soit F une sous-espace vectoriel de E de dimension finie et soit $u \in E$. Alors :

$$\mathrm{d}(u, F) = \mathrm{d}(u, p_F(u)) = \|u - p_F(u)\|.$$

De plus $p_F(u)$ est l'unique vecteur de F vérifiant cette égalité.

Remarque 5.40. On dit que $p_F(u)$ est l'unique vecteur de F qui minimise $\|u - y\|$ avec $y \in F$. Déterminer des projetés orthogonaux nous permettra donc en particulier de résoudre des problèmes de minimisation.

Remarque 5.41. Si on se réfère à l'illustration 5.34, on comprend bien (au moins en dimension 3) que le chemin le plus court entre un vecteur et un plan est obtenu en cherchant la projection orthogonale de ce vecteur sur le plan.

Méthode (Déterminer un infimum). Pour déterminer un infimum du type suivant

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a\sin(t) - b\cos(t))^2 \,\mathrm{d}t,$$

on procède en trois étapes.

(i) On reconnaît un espace vectoriel E de référence muni d'un produit scalaire correspondant à la forme ci-dessus.

(ii) On identifie le sous-espace vectoriel F et le vecteur u tels que ce calcul de minimisation se ramène à un calcul de projeté orthogonal :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a\sin(t) - b\cos(t))^2 \,\mathrm{d}t = \inf_{v \in F} \|u - v\|^2 = \mathrm{d}(u, F)^2.$$

(iii) On calcule $\|p_F(u)\|^2$.

(iv) On conclut en écrivant :

$$\mathrm{d}(u, F) = \|u - p_F(u)\| = \sqrt{\|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2}.$$

Exemple 5.42. Déterminons le minimum du point méthode ci-dessus (bien évidemment, un tel exercice serait guidé en TD) :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a\sin(t) - b\cos(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

(i) Au vu de notre énoncé, il semble judicieux de considérer l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle u, v \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) \,\mathrm{d}t.$$

(ii) Posons maintenant :

$$F = \left\{t \mapsto a\sin(t) + b\cos(t),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

et

$$\begin{array}{rccl} u & : & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t \end{array}$$

de sorte que pour toute fonction $v\colon t \mapsto a\sin(t) + b\cos(t)$ de F on ait :

$$\|v-u\|^2 = \langle v-u|v-u\rangle = \int_0^\pi (t - a\sin(t) - b\cos(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

On s'est ramené à un problème de minimisation de distance que l'on peut résoudre en faisant appel aux propriétés du projeté orthogonal.

(iii) On remarque que $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ est une base orthogonale de F. En effet, elle est clairement génératrice (si vous ne voyez pas pourquoi, relisez d'urgence le cours de MTB) et :

$$\langle \sin \,|\, \cos\rangle = \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^\pi = 0.$$

Une base orthonormale de F est alors obtenue en *normalisant* ces vecteurs, c'est-à-dire en les divisant par leurs normes respectives. Ce calcul est laissé à titre d'exercice. On obtient alors $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\right)$. D'où :

$$\|p_F(u)\|^2 = \langle u|\varepsilon_1\rangle^2 + \langle u|\varepsilon_2\rangle^2.$$

Or :

$$\langle u|\varepsilon_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left([-t\cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sqrt{2\pi},$$

et

$$\langle u|\varepsilon_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left([t\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t\right) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Donc :

$$\|p_F(u)\|^2 = 2\pi + \frac{8}{\pi}.$$

(iv) Remarquons finalement que :

$$\|u\|^2 = \int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{3}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a\sin(t) - b\cos(t))^2\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}(u,F)^2 \\ &= \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2 \qquad \text{(Pythagore)} \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou le corps des complexes. On notera encore a et b deux fonctions continues sur I.

I Équations scalaires d'ordre 1

I.1 Un théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 6.1. Une **équation différentielle scalaire linéaire d'ordre** 1 **sur** I est une équation de la forme :

$$(E)\quad :\qquad y'(t)+a(t)y(t)=b(t),$$

où a et b sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, et où y, l'inconnue, est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$. **L'équation homogène** associée à (E) est :

$$(H)\quad :\qquad y'(t)+a(t)y(t)=0.$$

Exemple 6.2. $(E)\ :\ y'(t)=\cos(t)y(t)+t$.

Théorème 6.3

Soit $(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{K}$. Alors, l'équation $y'+ay=b$ admet une unique solution sur I vérifiant la **condition initiale** $y(t_0)=y_0$.

Remarque 6.4. On dit souvent que « les solutions ne se croisent pas ». Cela signifie que si deux solutions de l'équation $y'=ay+b$ ont la même valeur en un point, alors elles sont égales.

I.2 Résolution de $(H)\ :\ y'(t)+a(t)y(t)=0$

Proposition 6.5

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est un espace vectoriel de dimension 1 dont les éléments sont les :

$$y: t\mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)},$$

où A est une primitive de a et où $\lambda\in\mathbb{K}$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 6.3 □

Remarque 6.6. Comment retrouver cette formule ? Notons que la fonction nulle est solution de (H). Comme les solutions ne se croisent pas, si y est une solution de (H) qui n'est pas la fonction nulle, alors elle ne s'annule jamais. On peut donc écrire :

$$(H)\Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)}=a(t)\Leftrightarrow \big(\ln|y(t)|\big)'=a(t)\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{K}\ :\ |y(t)|=\lambda\mathrm{e}^{A(t)}.$$

Ainsi, comme y est de signe constant, on peut enlever la valeur absolue.

30 Déterminer les solutions de l'équation différentielle : $(1+t^2)y'(t)+y(t)=0$.

I.3 Résolution de $y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$

Proposition 6.7

La solution générale de l'équation $(E) \quad : \quad y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$ est la somme d'une solution particulière de E et de la solution générale de son équation homogène associée.

I.3.1 Recherche d'une solution particulière de $y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$

I.3.1.1 À tâtons Suivant les expressions de a et de b, on peut parfois « deviner » une solution particulière de (E). On pourra alors essayer, en fonction des cas :
- Une combinaison linéaire de cos et de sin.
- Une fonction polynomiale.
- Le produit d'un polynôme par une fonction exponentielle.

I.3.1.2 Méthode de variation de la constante Si $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$ désigne la solution générale de (H), alors, on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $\lambda(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$. On pose alors $y(t)=\lambda(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ et on réinjecte y dans l'équation différentielle, puis on détermine λ.

I.4 Un exemple de résolution

Considérons l'équation $(E) \quad : \quad y'(t)-ty(t)=-t$. L'équation homogène associée à (E) est l'équation :

$$(H) \quad : \qquad y'(t)-ty(t)=0.$$

La solution générale de (H) est donc donnée par :

$$y(t)=\lambda \mathrm{e}^{t^2/2}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Pour finir de résoudre l'équation, il suffit alors de trouver une solution particulière de (E).
- Première méthode : à tâtons. Comme les fonctions a et b sont polynomiales on peut essayer de chercher une solution particulière qui soit un polynôme. Une rapide étude des degrés nous indique qu'il faut chercher un polynôme constant. Or, $y=1$ convient.
- Deuxième méthode : par variation de la constante. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

  $$y(t)=\lambda(t)\mathrm{e}^{t^2/2}.$$

  Alors :

  $$y'(t)-ty(t)=\lambda'(t)\mathrm{e}^{t^2/2}+t\lambda(t)\mathrm{e}^{t^2/2}-t\lambda(t)\mathrm{e}^{t^2/2}=\lambda'(t)\mathrm{e}^{t^2/2}.$$

  Donc, y est solution de (E) si et seulement si :

  $$\lambda'(t)=-t\mathrm{e}^{-t^2/2}=\left(\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)'.$$

  On en déduit qu'une solution particulière de (E) est :

  $$y(t)=\mathrm{e}^{-t^2/2}\times \mathrm{e}^{t^2/2}=1.$$

Finalement, la solution générale de (E) est donnée par :

$$y(t)=\lambda \mathrm{e}^{t^2/2}+1, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

31 Résoudre l'équation différentielle : $y'=\cos(x)+y$ sur $\mathbb{R}$.

32 Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec la condition initiale $y(1) = 2$:

$$(E) \ : \ ty'(t) - y'(t) = t^2 \mathrm{e}^t.$$

II Systèmes d'équations différentielles

II.1 Introduction

Définition 6.8. Un **système d'équations différentielle scalaire linéaire d'ordre** 1 **sur** I est un système de la forme :

$$(E) \ : \quad \begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1,n}y_n(t) + b_1(t), \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{2,n}y_n(t) + b_2(t), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{n,n}y_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

où les inconnues y_i sont des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$ et où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

Remarque 6.9. Si, dans la définition précédente on note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$

alors on peut écrire (E) sous forme matricielle

$$(E) \ : \ Y'(t) = AY(t) + B.$$

II.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 6.10 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de fonctions continues, $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors, le système différentiel $Y' = AY$ admet une unique solution vérifiant la *condition initiale* $Y(t_0) = Y_0$. De plus, les solutions de $Y' = AY$ forment un espace vectoriel de dimension n.

Remarque 6.11. Les solutions d'une équation du type

$$(E) \ : \ Y' = AY + B,$$

sont obtenues par sommation d'une solution particulière de E et de la solution générale de son équation homogène associée $(H) \ : \ Y' = AY$.

Définition 6.12. On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation $(H) \ : \ Y' = AY$ toute base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de l'ensemble des solutions de (H).

Proposition 6.13

Si A est une matrice diagonalisable **à coefficients constants**, alors un système fondamental de solutions de $(H)\ :\ Y' = AY$ est la famille $(y_i)_i$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} V_i,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les V_i forment une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Remarque 6.14. Lorsque A admet des valeurs propres complexes, le résultat ci-dessus est encore vrai. Pour trouver les solutions rélles du système d'équation, il suffit alors de prendre les parties réelles et imaginaires d'un système fondamental de solutions (on se reportera à la section II.4 pour un exemple de résolution dans ce cas).

II.3 Un premier exemple de résolution

On essayera de comprendre la proposition précédente en s'inspirant du cas particulier ci-après. Soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

Il s'agit de se ramener à deux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. Pour ce faire, on écrit le système sous la forme $Y' = AY$, où :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Diagonalisons la matrice A. On trouve :

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Or :

$$Y' = AY \Leftrightarrow Y' = PDP^{-1}Y \Leftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y.$$

Posons alors $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et résolvons $Z' = DZ$. On trouve :

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \mathrm{e}^{t} \\ z_2 = \mu \mathrm{e}^{-t} \end{cases}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

Or, $Y = PZ$ donc :

$$Y(t) = \lambda \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Remarque 6.15. Lorsque A n'est pas diagonalisable mais qu'elle est **trigonalisable** (i.e. semblable à une matrice triangulaire), on peut utiliser une méthode similaire et résoudre le système différentiel (en z) en partant de la dernière équation et en procédant par substitution.

II.4 Un deuxième exemple de résolution

Soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

On trouve pour les valeurs propres $1 \pm i$ et pour les vecteurs propres $(1, -i)$ et $(1, i)$.
On fait la même chose et on trouve :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{(1+i)t} + \mu \mathrm{e}^{(1-i)t} \\ -i\lambda \mathrm{e}^{(1+i)t} + i\mu \mathrm{e}^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

On détermine les solutions réelles en prenant les parties réelles et imaginaires d'un système fondamental de solutions. La solution générale sur $\mathbb{C}$ de (H) s'écrit :

$$Y(t) = \lambda Y_1(t) + \mu Y_2(t), \quad \text{où} \quad Y_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{it} \\ -i\mathrm{e}^t \mathrm{e}^{it} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-it} \\ i\mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-it} \end{pmatrix}.$$

Mais, par linéarité, les parties réelles et imaginaires de Y_1 sont aussi des solutions de (H). Or :

$$\mathrm{Re}(Y_1(t)) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(Y_1(t)) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

Comme ces deux solutions sont linéairement indépendantes et que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2, on en déduit que la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$Y(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) \\ \lambda \sin(t) - \mu \cos(t) \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

III Équations différentielles linéaires d'ordre 2

III.1 Introduction

Définition 6.16. On appelle *équation différentielle linéaire scalaire d'ordre* 2 définie sur I toute équation de la forme :

$$(E) \quad : \quad x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

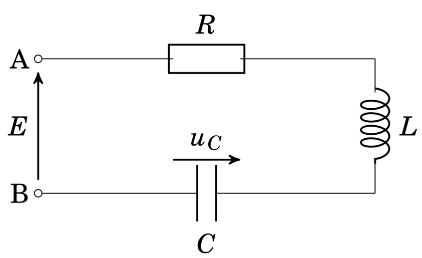
d'inconnue y où a, b et c sont continues de I dans $\mathbb{K}$.

Exemple 6.17 (Circuit RLC)**.** Considérons le circuit RLC de la figure ci-dessous soumis à un échelon de tension E. La tension u_C aux bornes du condensateur est régie par l'équation :

$$LC\, u_C''(t) + RC\, u_C'(t) + u_C = E.$$

Cela découle de la loi des mailles et des relations :

$$u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad u_R = Ri \quad \text{et} \quad i = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$



Remarque 6.18. Toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 peut se réécrire sous forme d'un système différentiel. En effet, avec les notations de la définition, (E) peut se réécrire

$$X' = A(t)X \qquad \text{où} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c}{a} & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

III.2 Un théorème de Cauchy

Théorème 6.19

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$. Alors, il existe une unique solution à l'équation :

$$y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t),$$

satisfaisant aux *conditions initiales* $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$. De plus, les solutions de l'équation :

$$y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t)$$

forment un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque 6.20. Toutes les solutions de l'équation $y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$ peuvent s'écrire comme somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

III.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Dans ce paragraphe on cosidère l'équation :

$$(H) \ : \ ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont trois constantes réelles ou complexes. On notera encore $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).

Définition 6.21. L'équation caractéristique associée à (H) est l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$:

$$(C) \ : \ ar^2 + br + c = 0.$$

Proposition 6.22

Soit Δ le déterminant de l'équation caractéristique. Une base de $\mathscr{S}_H$ de l'espace des solutions de (H) s'écrit (f_1, f_2) avec

(i) si $\Delta > 0$, $f_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de (C),

(ii) si $\Delta = 0$, $f_1(t) = \mathrm{e}^{rot}$ et $f_2(t) = t\mathrm{e}^{rot}$ où r_0 est la racine double de (C).

(iii) si $\Delta < 0$, $f_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta x)$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta x)$ où $\alpha + i\beta$ est une racine de C.

Dans toute la suite, E et F désigneront des espaces vectoriels de dimension finie. Ce chapitre de **rappels** ne se substitue en aucas cas au cours de MTB, bien plus complet. En outre, certains résultats sont présentés ici dans un ordre qui ne convient pas à quelqu'un qui découvre le cours.

I Applications linéaires

Proposition 1.1

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Définition 1.2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble $f(E)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \big\{f(u),\ u \in E\big\} = f(E).$$

Définition 1.3. Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **noyau** de f l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \big\{u \in E,\ f(u) = 0_F\big\}.$$

Propriété 1.4. L'image et le noyau d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels (respectivement de l'espace d'arrivée et de l'espace de départ).

Proposition 1.5

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(i) f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

(ii) f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition 1.6

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si f est bijective, alors sa bijection réciproque f^{-1} est linéaire de F dans E.

Proposition 1.7

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(i) $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$;

(ii) f est un isomorphisme ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Définition 1.8. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors on appelle **rang de** f et on note $\text{rg}(f)$ la quantité :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Méthode (Calcul du rang d'une application linéaire). Pour déterminer le rang d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E puis on applique le résultat suivant :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right).$$

Enfin, on pourra utiliser le point méthode ci-après pour calculer le rang de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Méthode (pour calculer le rang d'une famille de vecteurs). Ainsi, pour calculer le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ de E, on procède comme suit :

1) On considère la matrice A dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, $\cdots$ et u_p dans une base $\mathscr{B}$ de E.
2) On effectue une méthode du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A.
3) À la fin du processus, les colonnes non nulles de la matrice échelonnée obtenue sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs d'une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathscr{F})$. Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est alors le nombre de colonnes non nulles de cette matrice échelonnée.

Théorème 1.9 (du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-ev quelconque et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Corollaire 1.10. Si E et F sont de même dimension alors une application linéaire f de E dans F est bijective ssi elle est injective (et ssi elle est surjective).

II Projecteurs et symétries

Définition 1.11. Soient F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E. Alors, tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = u_F + u_G, \quad \text{où } u_F \in F \text{ et } u_G \in G.$$

La projection sur F parallèlement à G est l'application linéaire :

$$p \ : \ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ u = u_F + u_G & \mapsto & u_F \end{array}$$

Proposition 1.12

Une application linéaire $p\colon E \to E$ est un projecteur ssi $p \circ p = p$, c'est-à-dire, ssi :

$$\forall u \in E, \quad p\big(p(u)\big) = p(u).$$

Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Remarque 1.13. En pratique, si on connaît la matrice A d'un endomorphisme f dans n'importe quelle base, on pourra vérifier si $A^2 = A$ pour savoir s'il s'agit ou non d'un projecteur.

Définition 1.14. Soient F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E. Alors, tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = u_F + u_G, \quad \text{où } u_F \in F \text{ et } u_G \in G.$$

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} p & : & E = F \oplus G & \to & E \\ & & u = u_F + u_G & \mapsto & u_F - u_G \end{array}$$

Proposition 1.15

Une application linéaire $s\colon E \to E$ est une symétrie ssi $s \circ s = id_E$, c'est-à-dire, ssi :

$$\forall u \in E, \quad s\big(s(u)\big) = u.$$

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Remarque 1.16. En pratique, si on connaît la matrice A d'un endomorphisme f dans n'importe quelle base, on pourra vérifier si A^2 est la matrice identité pour savoir s'il s'agit ou non d'un projecteur.

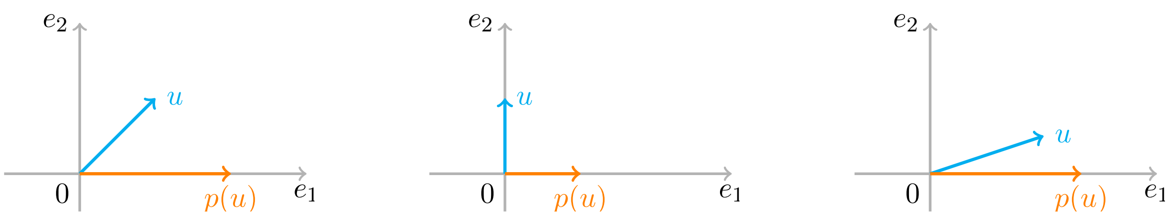
Exemple 1.17. Considérons l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

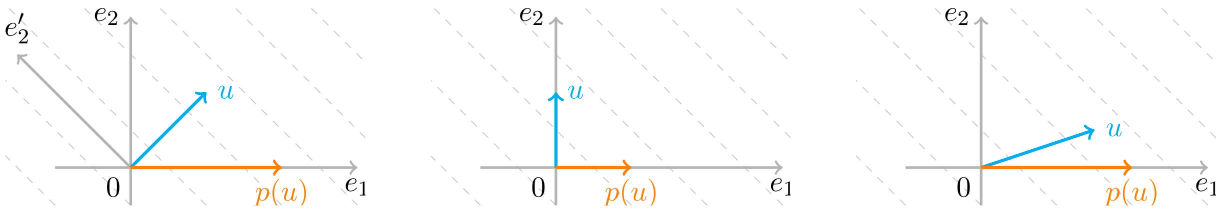
Autrement dit, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$u(x,y)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou, de manière équivalente, $u(x,y) = (x + y, 0)$. Pour démontrer que p est un projecteur, il suffit de remarquer que $A^2 = A$. De plus, d'après le calcul ci-dessus, il est clair que p projette tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des abscisses, mais pas de manière orthogonale. Ci-dessous quelques vecteurs (en bleu) et leurs images (en orange).



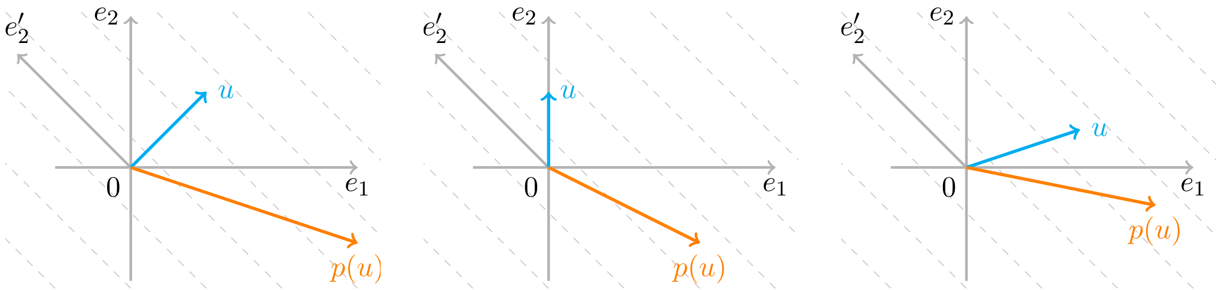
Il est plus simple de comprendre le projecteur p dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2')$ où $e_2' = (-1, 1)$. En effet, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2')$.



De la même manière, on pourrait considérer la symétrie g dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avec les mêmes notations, il s'agit de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2')$.



III Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Définition 1.18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Les λ_i de cette décomposition sont appelés **coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$. On écrit :

$$u_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.19. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$** et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \left(f(e_1)_{\mathscr{C}} | f(e_2)_{\mathscr{C}} | \dots | f(e_n)_{\mathscr{C}} \right).$$

Lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$ et que $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

Proposition 1.20

On a :

(i) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$,

(ii) $\forall u \in E, \quad f(u)_{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) u_{\mathscr{B}}$,

(iii) $\forall u \in E,\ \forall v \in F, \quad \left[v = f(u) \Leftrightarrow v_{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) u_{\mathscr{B}}\right]$.

Remarque 1.21. Pour une démonstration de ce résultat on pourra se référer au cours de MTB.

Exemple 1.22. Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$ respectivement. Soit aussi :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & P'. \end{array}$$

Pour déterminer la matrice de φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, il suffit d'exprimer les images par φ des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$. Or :

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(X) = 1, \quad \varphi(X^2) = 2X \quad \text{et} \quad \varphi(X^3) = 3X^2.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}.$$

Proposition 1.23

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, que $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et que $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Corollaire 1.24

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Proposition 1.25

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{D}$. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et que $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Corollaire 1.26

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme (i.e. f est bijective),

(ii) A est inversible.

Dans ce cas, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1}.$$

Définition 1.27. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, i.e. :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Proposition 1.28

La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est inversible et :

$$P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

Proposition 1.29

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors, pour tout vecteur u de E :

$$u_{\mathscr{B}} = P u_{\mathscr{B}'}.$$

Théorème 1.30 (Formule de changement de base)

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P,$$

où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.