Exercice 1

1. $\det(M(x)) = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -x(3x-2)$

   La matrice $M(x)$ est inversible si, et seulement si, $\det(M(x)) \neq 0$

   c'est-à-dire $\boxed{x \neq 0 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3}}$

2. La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale : A admet deux valeurs propres : 1 et 2. Puisque 2 est de multiplicité 1, le sous-espace propre $E_2(A)$ associé à la valeur propre 2, est de dimension 1.

   Donc A est diagonalisable ssi $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3$
   ssi $\dim(E_1(A)) = 3 - 1 = 2$

   Or par définition, $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et d'après le théorème du rang dans sa version matricielle : $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) + \mathrm{rg}(A - I_3) = \dim(\mathbb{R}^3)$
   d'où $\mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - \dim(E_1(A))$

   Donc A est diagonalisable ssi la matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1

   c'est-à-dire $\boxed{b = 0}$.

3. Une réflexion s de $\mathbb{R}^3$ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Donc la matrice de s dans une base adaptée est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Ainsi les valeurs propres de s sont $\boxed{\text{1 (de multiplicité 2) et -1 (de multiplicité 1)}}$.

4. Notons $\mathscr{B}_0 = (e_1\,,\, e_2\,,\, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   L'énoncé nous fait admettre que $B \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

   On sait que $\mathrm{Tr}(B) = 1 + 2\cos\theta$ d'où $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

   De plus $\sin\theta$ est du signe de $\det_{\mathscr{B}_0}(\overrightarrow{n}, e_1, u(e_1)) = \dfrac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$

   Donc $\sin\theta = -\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi $\boxed{\theta = -\dfrac{\pi}{3}}$

Exercice 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0\,,\,+\infty[$ par $f_n(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}$
   Chaque fonction f_n est continue sur $[0\,,\,+\infty[$.

   - Soit $t \in \mathbb{R}^+$, t fixé. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{t}{n^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$

     D'où, par composition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{t}{n^2}\right) = 1$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}}$

   - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0\,,\,+\infty[$.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Alors $-\dfrac{t}{n^2} \leqslant 0 \Longrightarrow \exp\left(-\dfrac{t}{n^2}\right) \leqslant 1$

     Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0\,,\,+\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

     la fonction dominante $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive et **intégrable** sur $[0\,,\,+\infty[$. En effet :
     $$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^x = \arctan x - \arctan(0) \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

   Le **théorème de convergence dominée** permet de conclure que les fonctions f_n sont intégrables sur $[0\,,\,+\infty[$ et que

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4\,x^2}\,\mathrm{d}x$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n fixé.
   La fonction $g_n : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4\,x^2}$ est continue et positive sur $[0\,,\,+\infty[$.

   - <u>Première méthode</u> avec le critère de comparaison.

     $x \geqslant 0 \Longrightarrow 1 + n^4\,x^2 \geqslant 1 \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{1+n^4\,x^2} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4\,x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 < g_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} -\mathrm{e}^{-A}+1 = 1$

Ainsi, par comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

- Deuxième méthode avec le critère de Riemann.

$x^2\,g_n(x) = \dfrac{x^2}{1+n^4\,x^2}\mathrm{e}^{-x} \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^4}\mathrm{e}^{-x}$.

D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\,g_n(x) = 0$. Donc, d'après le **critère de Riemann** (2>1), l'intégrale généralisée $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

(b) Soit A un réel positif. On procède au changement de variable affine $t = n^2\,x$, dans l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4\,x^2}\,\mathrm{d}x$.

Alors $x = \dfrac{t}{n^2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n^2}\,\mathrm{d}t$. D'où

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+(n^2\,x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{n^2 A} \frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}\,\frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\int_0^{n^2 A}\frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+(n^2\,x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\boxed{I_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t}$

(c) $\sum I_n$ est une série à termes positifs. On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\boxed{I_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}}$.

Donc, d'après le **critère d'équivalence**, les séries $\sum I_n$ et $\sum \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$ sont de même nature.

Or la série $\sum \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$ est de même nature que la **série de Riemann** $\sum \dfrac{1}{n^2}$ qui est convergente (car 2>1).

Par conséquent la série $\boxed{\sum I_n \text{ est convergente}}$.

Exercice 3

$I = [0,+\infty[$. On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$ d'où $|a|^2+|b|^2 \geqslant 2|a|\,|b|$.
   Or $|a|^2 = a^2$ et $|a|\,|b| = |ab|$. Ainsi $\boxed{|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$.

2. Soit $(f,g)\in E^2$. Alors f et g sont continues sur I.
   Donc la fonction fg est également continue sur I.
   D'après l'inégalité précédente, on a $\forall t\in I,\ \left|f(t)\,g(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(f(t)^2+g(t)^2\right)$.
   Or les fonctions f^2 et g^2 sont continues et intégrables sur I.
   Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(f(t)^2+g(t)^2\right)$ est positive, continue et intégrable sur I, la fonction produit fg est intégrable sur I.
   Ainsi $\boxed{\text{le produit de deux éléments de } E \text{ est intégrable sur } I}$

3. Soit f, g et h trois fonctions de E. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

   - Existence. Le réel $\varphi(f,g)$ est bien défini car on a vu que la fonction fg était intégrable sur I.
   - Linéarité par rapport à la première variable.
     $\varphi(\lambda f+g,h) = \displaystyle\int_I (\lambda f+g)(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\lambda\,f(t)\,h(t)+g(t)\,h(t)\right)\,\mathrm{d}t$
     $= \lambda\displaystyle\int_I f(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t$ par **linéarité de l'intégrale**.
     Ainsi $\varphi(\lambda f+g,h) = \lambda\,\varphi(f,h)+\varphi(g,h)$
   - Symétrie. $\varphi(g,f) = \displaystyle\int_I g(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(f,g)$.
   - Positivité. Par définition de E, la fonction f^2 est continue, positive et intégrable sur I.
     Donc par **positivité de l'intégrale**, $\displaystyle\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi $\varphi(f,f)\geqslant 0$.

- Définie positivité. On suppose que $\varphi(f,f)=0$. Alors $\displaystyle\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$.

  Or la fonction $t \mapsto f(t)^2$ est *continue* et positive sur l'intervalle $I=[0\,,+\infty[$.

  Donc d'après le **théorème de positivité stricte**, $\forall t \in I,\ f(t)^2=0$

  Ainsi $f=0_E$.

Finalement $\boxed{\varphi \text{ définit bien un produit scalaire sur } E}$

Partie B : inégalité de Cauchy Schwarz

Soit α un nombre réel strictement positif.

1. Soit x un réel positif.

   $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right]_{t=0}^{t=x} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha x}-1\right)$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha x}=0$ car $-2\alpha<0$.

   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\alpha}(0-1)=\frac{1}{2\alpha}$

   Ainsi l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et

   $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha}}$.

2. Soit f une fonction quelconque de E. On considère la fonction $\boxed{g : t\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}}$.
   Alors la fonction g est continue sur I et d'après la question précédente, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I g(t)^2\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donc $g\in E$.

   D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, $|\langle f\mid g\rangle| \leqslant \|f\|\times\|g\|$

   Avec $\displaystyle\|f\| = \sqrt{\langle f\mid f\rangle} = \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$

   et $\displaystyle\|g\| = \left(\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$

   $$\text{Ainsi}\quad \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\,\alpha}}\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Partie C : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t\longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $f_2 : t\longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$

1. Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur I. De plus, on a vu à la première question de la partie B, que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)^2\,\mathrm{d}t$ était convergente pour tout réel $\alpha>0$. En particulier pour $\alpha=1$ et $\alpha=2$.
   Donc f_1 et f_2 sont des éléments de E.

2. La famille (f_1,f_2) est libre. Donc $F=\mathrm{Vect}(f_1\,,\,f_2)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E.

   On applique l'algorithme d'**orthonormalisation de Gram-Schmidt**.
   On construit d'abord une *base orthogonale* (g_1,g_2) de F en posant $\boxed{g_1=f_1}$ et

   $$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2\mid g_1\rangle}{\langle g_1\mid g_1\rangle}\cdot g_1 = f_2 - \frac{\langle f_2\mid f_1\rangle}{\langle f_1\mid f_1\rangle}\cdot f_1$$

   Or $\displaystyle\langle f_1\mid f_1\rangle = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\langle f_2\mid f_1\rangle = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$

   Donc $\boxed{g_2 = f_2 - \frac{2}{3}f_1}$. Il reste à normaliser ces deux vecteurs g_1 et g_2.

   On sait déjà que $\displaystyle\|g_1\| = \sqrt{\langle g_1\mid g_1\rangle} = \sqrt{\langle f_1\mid f_1\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

   De plus $\displaystyle\|g_2\|^2 = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}\right)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-4t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{4}{9}\mathrm{e}^{-4t}\right)\,\mathrm{d}t$

   $$= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4t}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t + \frac{4}{9}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}-\frac{4}{9}+\frac{4}{18}=\frac{1}{36}$$

   D'où $\displaystyle\|g_2\| = \frac{1}{6}$

   On pose enfin $\displaystyle\varepsilon_1 = \frac{1}{\|g_1\|}g_1 = \sqrt{2}\,g_1$ et $\displaystyle g_2 = \frac{1}{\|g_2\|}g_2 = 6\,g_2$

   Ainsi $\boxed{\varepsilon_1 : t\mapsto \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t} \quad\text{et}\quad \varepsilon_2 : t\mapsto 6\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-t}}$

3. • Montrons d'abord que $\boxed{g \in E}$. Comme g est continue sur I, on montre que g est de carré intégrable sur I.

Pour tout réel $t > 0$, $t^2\, g(t)^2 = t^4\, \mathrm{e}^{-2t} = \dfrac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right)^2}$

Or par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right)^2 = +\infty$

puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\, g(t)^2 = 0$. Le critère de Riemann permet de conclure que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

La question posée revient à minimiser $\|g-h\|^2$ lorsque h décrit le sous-espace F. On sait, d'après le théorème de projection orthogonale, que ce minimum est atteint en un unique point h de F, qui est le projeté orthogonal de g sur F.

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t} - a\,\mathrm{e}^{-t} - b\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^2\,\mathrm{d}t = d(g,F)^2 = \|g - p_F(g)\|^2$$

On cherche donc à exprimer $h = p_F(g)$ comme combinaison linéaire de f_1 et f_2.

• <u>Première méthode</u> utilisant une base orthonormale $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F.

$p_F(g) = \langle g|\varepsilon_1\rangle \cdot \varepsilon_1 + \langle g|\varepsilon_2\rangle \cdot \varepsilon_2$

avec $\displaystyle\langle g|\varepsilon_1\rangle = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}$

et $\displaystyle\langle g|\varepsilon_2\rangle = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,(6\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = 6\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t - 4\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle = \frac{6}{9} - \frac{4}{4} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

D'où $\displaystyle p_F(g) = \frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}f_1) - \frac{1}{3}(6f_2 - 4f_1) = \frac{1}{2}f_1 - 2f_2 + \frac{4}{3}f_1$

Ainsi $\boxed{p_F(g) = \dfrac{11}{6}\,f_1 - 2\,f_2}$

• <u>Deuxième méthode</u> utilisant une caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur.

Soit h un élément de F. Alors $\exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2$; $h = a\cdot f_1 + b\cdot f_2$.

$$h = p_F(g) \iff (g-h)\in F^\perp \iff \begin{cases} (g-h)\perp f_1 \\ (g-h)\perp f_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle g-h \mid f_1\rangle = 0 \\ \langle g-h \mid f_2\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \langle h \mid f_1\rangle = \langle g \mid f_1\rangle \\ \langle h \mid f_2\rangle = \langle g \mid f_2\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} a\,\langle f_1 \mid f_1\rangle + b\,\langle f_2 \mid f_1\rangle = \langle g \mid f_1\rangle \\ a\,\langle f_1 \mid f_2\rangle + b\,\langle f_2 \mid f_2\rangle = \langle g \mid f_2\rangle \end{cases}$$

Or on a vu que $\langle f_1 \mid f_1\rangle = \dfrac{1}{2}$, $\quad\displaystyle\langle f_2 \mid f_1\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$, $\quad\langle f_2 \mid f_2\rangle = \dfrac{1}{4}$

et $\displaystyle\langle g \mid f_1\rangle = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\quad\displaystyle\langle g \mid f_2\rangle = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-3\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$\text{Donc } h = p_F(g) \iff \begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{4} = \dfrac{1}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} 6a + 4b = 3 \\ 12a + 9b = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6a = 3 - 4b \\ b = -2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{11}{6} \\ b = -2 \end{cases}$$