Examen final - MT25

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les trois exercices seront rendus sur trois copies différentes.

Exercice 1 : à rendre sur une première copie (4 points)

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice : $M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 6 & x \end{pmatrix}$

   Déterminer les nombres réels x pour lesquels la matrice $M(x)$ est inversible.

2. Soit a et b deux nombres réels. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur b, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

3. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
   Quelles sont les valeurs propres d'une réflexion de $\mathbb{R}^3$? Préciser leurs ordres de multiplicité.

4. On considère la rotation vectorielle u de $\mathbb{R}^3$, d'axe dirigé et orienté par $\overrightarrow{n} = (-1, 1, 1)$ et dont la matrice dans la base canonique est $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'angle θ de u.

Exercice 2 : à rendre sur une deuxième copie (4 points)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0\,,+\infty[$ par $f_n(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}$

   Déterminer en appliquant le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4\,x^2}\,\mathrm{d}x$

   (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée I_n.

   (b) À l'aide du changement de variable $t = n^2\,x$, montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   (c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

Exercice 3 : à rendre sur une troisième copie (12 points)

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.
On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Prouver que pour tous réels a et b, $\quad |ab| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une fonction intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f, g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.
   Montrer que φ est un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \mid \rangle$.

Partie B : inégalité de Cauchy Schwarz

Soit α un nombre réel strictement positif.

1. Justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t} \, \mathrm{d}t$.
2. Démontrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{e}^{-\alpha t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\,\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

Partie C : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $f_2 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$

1. Justifier que f_1 et f_2 sont des éléments de E.
2. Construire une base orthonormale $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(f_1\,,\, f_2)$ de E.
3. On admet que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-k\,t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$
   Calculer les deux réels a et b minimisant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t} - a\,\mathrm{e}^{-t} - b\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^2 \, \mathrm{d}t$
   On ne demande pas la valeur de ce minimum. On pourra introduire la fonction $g : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$