Final MT3F

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.
Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 : diagonalisation et système différentiel (7 points)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer $A^2 - 3A$. En déduire un polynôme $Q(X)$ annulateur de A.
   (b) Quelle sont les valeurs propres possibles pour A ? *On ne calculera pas le polynôme caractéristique de A.*
2. (a) Montrer que $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour A, associé à une valeur propre que l'on précisera. On admettra que le sous-espace propre associé est de dimension 1.
   (b) Quel est le rang de la matrice $A - I_3$? En déduire une valeur propre de A, puis déterminer le sous-espace propre associé.
3. Montrer qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$ *(on précisera D et P mais le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).*
4. On considère le système différentiel :

$$(S) : \forall\, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases},$$

   d'inconnues les fonctions x, y et z, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner l'écriture matricielle de (S).
   (b) Résoudre (S).

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 : projection orthogonale (7 points)

On munit $E = \mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique, et on note $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. Posons

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,2,2,3), \quad F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

1. Déterminer un système d'équations de $F^\perp$. En déduire une base $\mathcal{C}$ de $F^\perp$.
2. Déterminer une base orthonormée (f_1, f_2) de F.
3. (a) On considère la famille $\mathfrak{B}' = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ obtenue en juxtaposant les bases (f_1, f_2) et $\mathcal{C}$. Justifier sans calcul que $\mathfrak{B}'$ est une base de E.
   (b) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Donner la matrice de p_F dans la base $\mathfrak{B}'$ en justifiant brièvement.
4. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique $\mathfrak{B}$.
5. Déterminer la distance du vecteur $w = (2,1,3,2)$ à F.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 : séries numériques (7 points)

1. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln n}{n}$ est divergente.

   Dans la suite de l'exercice, on pose, pour tout $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

   (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$? Justifier brièvement.
2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. (a) On admet que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur l'intervalle $[3, +\infty[$.

   Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 3$, $\qquad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$

   (b) En utilisant une sommation des inégalités précédentes, montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - \ln^2 3\right) \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - \ln^2 3\right). \qquad (\star)$$

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln^2 n}$ à l'aide de l'encadrement $(\star)$. En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.