Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1/2 & 3 & -1/2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) On calcule le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(A - X\, I_3) &= \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -2 \\ 1/2 & 3-X & -1/2 \\ -1 & 3 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3-X & 3 & -2 \\ 3-X & 3-X & -1/2 \\ 3-X & 3 & 1-X \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 3-X & 3 & -2 \\ 0 & -X & 3/2 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= -X(3-X)^2 && \text{dét. d'une matrice triangulaire}
\end{aligned}$$

Donc A admet deux valeurs propres réelles : zéro de multiplicité 1 et $\lambda = 3$ de multiplicité 2.

(b) $A\,U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1/2 & 3 & -1/2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot U_0$

Donc $U_0 \in \mathrm{Ker}(A)$ ce qui revient à dire que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre zéro.

(c) • On rappelle que $\lambda = 3$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$U \in E_3(A) \iff AU = 3U \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z &= 3x \\ x/2 + 3y - z/2 &= 3y \\ -x + 3y + z &= 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 3y - 2z &= 0 \\ x/2 - z/2 &= 0 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 3y - 2z = 0 \\ z = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \iff U = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En posant $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on voit que $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(U_1)$ est de dimension 1.

• Comme la valeur propre 0 est de multiplicité 1, le sous-espace propre associé à 0, qui est aussi le noyau de A, est de dimension 1 :

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(U_0)$$

La somme des dimensions des deux sous-espaces propres de A est égale 2 qui n'est pas l'ordre de A. On en déduit que $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)$.

(a) • On doit avoir $f(\varepsilon_1) = (0,0,0)$, $f(\varepsilon_2) = \lambda\, \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \lambda\, \varepsilon_3$. Donc ε_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre zéro : on choisit $\boxed{\varepsilon_1 = (1,0,1)}$. De même ε_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ : on choisit $\boxed{\varepsilon_2 = (1,1,1)}$.

• Il reste à choisir ε_3. Posons $\varepsilon_3 = (x,y,z)$.

Alors $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \lambda \cdot \varepsilon_3 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U_1 + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\iff (A - 3\,I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U_1 \iff \begin{cases} -x + 3y - 2z &= 1 \\ x/2 - z/2 &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 3y - 2z &= 1 \\ x - z &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 2 \\ -z - 2 + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z + 2 \\ y = z + 1 \\ z = z \end{cases} \qquad \text{On choisit de prendre } \varepsilon_3 = (3,2,1)$$

• Montrons que la famille $\mathscr{B} = (\varepsilon_1\,,\, \varepsilon_2\,,\, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en calculant son déterminant dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

$$\det_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_1\,,\, \varepsilon_2\,,\, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times 1 \times 1 \times (-2) = -2 \neq 0$$

(b) D'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme f, en notant P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ vers la «nouvelle» base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)\, P \text{ c'est-à-dire } T = P^{-1}A\,P$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) On déduit de la question précédente que $A = P\,T\,P^{-1}$
puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$

3. Posons $D = \mathrm{diag}(0, \lambda, \lambda)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Alors $T = D + N$ et on vérifie, par des calculs de produits de matrices, que $ND = \lambda\,N = DN$ et que $N^2 = \mathbb{O}_3$.

   On en déduit que pour tout entier $k \geqslant 2,\ N^k = \mathbb{O}_3$.

   Puisque les matrices D et N commutent, on obtient par la formule du binôme de Newton ($n \in \mathbb{N}^\star$) :

$$T^n = (D+T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N$$

$$= D^n + n\,D^{n-1}N = D^n + n\,\lambda^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_0 + 3v_0 - 2w_0 \\ u_0/2 + 3v_0 - w_0/2 \\ -u_0 + 3v_0 + w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $u_2 = 2u_1 + 3v_1 - 2w_1 = 14 + 12 - 2 = 24$.

   (b) $X_{n+1} = A\,X_n$ d'où $X_n = A^n\,X_0 = P\,T^n\,P^{-1}\,X_0$ d'après 2.(c)

   (c) On admet que $\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad u_n = \alpha\,3^n + \beta\,n\,3^{n-1}$
   Pour $n = 1 :\ u_1 = \alpha\,3^1 + \beta \times 1 \times 3^{1-1} = 3\,\alpha + \beta$
   Pour $n = 2 :\ u_2 = \alpha\,3^2 + \beta \times 2 \times 3^{2-1} = 9\,\alpha + 6\,\beta$.

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 7 \\ 9\alpha + 6\beta = 24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 7 \\ 3\alpha + 2\beta = 8 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 3\alpha = 7 - \beta \\ \beta = 1 \end{cases} \begin{cases} 3\alpha = 6 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = 2 \times 3^n + n\,3^{n-1}}$

Exercice 2

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^\alpha}{2^n}$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$
D'après le critère de D'Alembert, la série $\sum \dfrac{n^\alpha}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Soit $(P,Q,R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   - **Symétrie :** $\varphi(Q,P) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} Q(n)P(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n) = \varphi(P,Q)$.
   - **Bilinéarité :**
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q, R) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(\lambda P(n) + Q(n))R(n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \frac{1}{2^n} P(n)R(n) + \frac{1}{2^n} Q(n)R(n).\end{aligned}$$
   Les séries $\sum \dfrac{1}{2^n}P(n)R(n)$ et $\sum \dfrac{1}{2^n}Q(n)R(n)$ étant convergentes, on a, par linéarité :
   $$\varphi(\lambda P+Q,R) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}P(n)R(n) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}Q(n)R(n) = \lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R).$$
   φ est donc linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite, donc bilinéaire.
   - **Positivité :** $\varphi(P,P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}P^2(n) \geqslant 0$ (la somme d'une série convergente à termes positifs est positive).
   - **Caractère défini :** $\varphi(P,P) = 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}P^2(n) = 0 \Longrightarrow$
   $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2^n}P^2(n) = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P^2(n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$.
   Le polynôme P admet une infinité de racines, il s'agit donc du polynôme nul. Donc $\varphi(P,P) = 0 \Longrightarrow P = 0_E$.

   φ est donc un produit scalaire sur E.

3. $S_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$).

   $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\times 4 = 2$ (où l'on a utilisé le résultat du cours sur la somme d'une série géométrique dérivée).

4. (a) Posons $P = X^2 - aX - b$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$$\begin{cases} P \perp 1 \\ P \perp X\end{cases} \iff \begin{cases}\varphi(P,1) = 0\\ \varphi(P,X) = 0\end{cases}$$
$$\underset{\text{par bilinéarité}}{\iff} \begin{cases}\varphi(X^2,1) - a\varphi(X,1) - b\varphi(1,1) = 0\\ \varphi(X^2,X) - a\varphi(X,X) - b\varphi(X,1) = 0\end{cases} \iff \begin{cases} S_1 a + bS_0 = S_2 \\ S_2 a + S_1 b = S_3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2a+2b = 6\\ 6a+2b = 26\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} a+b = 3\\ 4a = 20\end{cases} \iff \begin{cases} a = 5\\ b = -2\end{cases}$$
Ainsi, $P = X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X si et seulement si $(a,b) = (5,-2)$.

   (b) Rappelons que le projeté orthogonal $p_F(X^2)$ de X^2 sur $F = \text{Vect}(1,X)$ est caractérisé par $\begin{cases} P_F(X^2) \in F\\ X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp\end{cases}$.
Soit $Q = 5X-2$. Alors $Q \in F$. D'autre part, d'après la question précédente, $X^2 - Q \perp 1$ et $X^2 - Q \perp X$. Donc $X^2 - Q \in F^\perp$. On en déduit alors que $p_F(X^2) = Q = 5X-2$.

   (c) Soit $d(X^2,F)$ la distance de X^2 à F. Alors
$$d(X^2,F) = \|X^2 - p_F(X^2)\| = \|X^2 - 5X + 2\|.$$
D'après le théorème de Pythagore,
$$\begin{aligned}\|X^2-5X+2\|^2 &= \|X^2\|^2 - \|5X-2\|^2 = \varphi(X^2,X^2) - \varphi(5X-2,5X-2)\\ &= \varphi(X^2,X^2) - 25\varphi(X,X) + 20\varphi(X,1) - 4\varphi(1,1)\\ &= S_4 - 25S_2 + 20S_1 - 4S_0\\ &= 150 - 150 + 40 - 8\\ &= 32.\end{aligned}$$
La distance recherchée est donc égale à $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Exercice 3

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geqslant 0$, on a l'encadrement $0 \leqslant \left|\sin(xt)e^{-t^2}\right| \leqslant e^{-t^2}$. D'après la question 1. (a), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le critère de comparaison, les fonctions en présence étant continues et positives sur $[0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\sin(xt)e^{-t^2}\right|\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Soit $A > 0$. Posons $u : t \mapsto \cos(xt)$, $v'(t) = te^{-t^2}$. Alors $u'(t) = -x\sin(xt)$ et $v(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ (par exemple). Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, A]$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A t\cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\cos(xt)e^{-t^2}\right]_0^A - \int_0^A(-x\sin(xt))\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}\cos(xA)e^{-A^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\star)\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $A > 0$, $0 \leqslant \left|-\dfrac{1}{2}\cos(xA)e^{-A^2}\right| \leqslant \dfrac{e^{-A^2}}{2}$. Comme $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{e^{-A^2}}{2} = 0$, par encadrement, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{1}{2}\cos(xA)e^{-A^2} = 0$.
En passant à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(\star)$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

3. (a) L'équation homogène associée à (E) est $(H) : y' + \dfrac{x}{2}y = 0$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$. D'après le cours, ses solutions sont les fonctions de la forme $y_H : x \mapsto \lambda e^{-x^2/4}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) La fonction $t \mapsto e^{t^2/4}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2/4}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = e^{x^2/4}$.
   La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}\times\left(-\frac{x}{2}e^{-x^2/4}\right)\int_0^x e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{-x^2/4}e^{x^2/4}\\ &= -\frac{x}{4}e^{-x^2/4}\int_0^x e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\\ &= -\frac{x}{2}f(x) + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = \frac{1}{2},$$

   et f est une solution de (E).

   (c) D'après le cours, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{-x^2/4} + f(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. D'après la question 2., la fonction S est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $S(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(0)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, S est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{2}y = \dfrac{1}{2} \\ y(0) = 0\end{cases}.$$

   Il existe donc un réel λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \lambda e^{-x^2/4} + f(x).$$

   De plus, on a les équivalences :

$$S(0) = 0 \iff \lambda e^0 + f(0) = 0 \iff \lambda = -f(0) = 0$$

   On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{S(x) = f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t}.$$