Final MT3F

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 (7 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1/2 & 3 & -1/2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A. *On notera λ la valeur propre strictement positive de A.*

   (b) Vérifier que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre que l'on précisera.

   (c) Déterminer une base de $E_\lambda(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ? Justifier.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est A.

   (a) Déterminer une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de f est :

   $$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   (b) Proposer une matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = P^{-1} A P$ *(on ne calculera pas P^{-1}).*

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction de n, T, P et P^{-1}.

3. Conjecturer l'expression de T^n pour tout entier $n \geqslant 1$ *(on ne démontrera pas cette conjecture).*

4. **Application.** On définit trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $v_0 = 1\,,\ w_0 = -2$ et

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 2\,u_n + 3\,v_n - 2\,w_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3\,v_n - \dfrac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3\,v_n + w_n \end{cases}$$

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer X_1 et u_2.

   (b) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n, puis donner l'expression de X_n en fonction de n, T, P et X_0.

   (c) On déduit de la question 3 précédente l'existence de deux constantes réelles α et β telles que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \alpha\, 3^n + \beta\, n\, 3^{n-1}$. Déterminer α et β.

Changez de copie.

Exercice 2 (7 points)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Prouver que la série $\sum \frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente.

   Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On pose, pour tous polynômes P et Q appartenant à E :
   $$\varphi(P,Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} P(n)Q(n).$$
   La question 1. montre que la série définissant $\varphi(P,Q)$ converge, ce que l'on ne demande pas de justifier.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{2^n}$. Calculer S_0 et S_1. On admet que $S_2 = 6\,,\ S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.
4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1,X)$ dans E muni du produit scalaire de la question 2.
   (a) Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.
   (b) En déduire le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Justifier.
   (c) Calculer alors la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. On pourra utiliser le théorème de Pythagore.

Changez de copie.

Exercice 3 (7 points)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On admet que la fonction $S : x \mapsto S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$S'(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   À l'aide d'une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^{A} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, où $A > 0$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$
3. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{x}{2}y = \frac{1}{2}$.
   (a) Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E).
   (b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que f est une solution particulière de (E) *(on ne cherchera pas à calculer l'intégrale intervenant dans l'expression de f)*.
   (c) En déduire les solutions de (E).
4. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, une autre expression de $S(x)$ faisant intervenir la fonction f.