Exercice 1

1. (a) $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad a/b \quad a/c} \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \boxed{3} & 3a/b & 3a/c \\ 3b/a & 3 & 3b/c \\ 3c/a & 3c/b & 3 \end{pmatrix} = 3\,M$

Donc $M^2 = k\,M$ avec $\boxed{k=3}$.

(b) Nous avons $M^2 - 3\,M = \mathbb{O}_3$.
Donc le polynôme $X^2 - 3\,X = X(X-3)$ est annulateur de M.

Si λ est une valeur propre de M alors λ est une racine de $X(X-3)$.
Ainsi $\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles pour } M \text{ sont 0 et 3}}$.

2. On constate que les deux dernières colonnes de M sont proportionnelles à la première colonne qui n'est pas nulle.
En effet, la deuxième colonne est égale à a/b multiplié par la première colonne. Et la troisième colonne est égale à a/c multiplié par la première colonne.
Par conséquent $\boxed{M \text{ est de rang 1}}$.

Comme M n'est pas inversible, $\boxed{\text{zéro est une valeur propre de } M}$.

On peut même préciser la dimension du sous-espace propre associé, à savoir la dimension de $E_0(M) = \mathrm{Ker}(M)$. En effet, selon le théorème du rang en version matricielle

$$\dim(\mathrm{Ker}M) + \mathrm{rg}(M) = \mathrm{ordre}(M) \quad \text{d'où} \quad \dim(\mathrm{Ker}M) = 3 - 1 = 2$$

3. La matrice M admet pour valeurs propres 3 et 0.

(a) On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- $U \in E_3(M) \iff MU = 3U \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + a/b \cdot y + a/c \cdot z & = & 3x \\ b/a \cdot x + y + b/c \cdot z & = & 3y \\ c/a \cdot x + c/b \cdot y + z & = & 3z \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} -2x + a/b \cdot y + a/c \cdot z = 0 \\ b/a \cdot x - 2y + b/c \cdot z = 0 \\ c/a \cdot x + c/b \cdot y - 2z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -2bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 \\ bc\,x - 2ac\,y + ab\,z = 0 \\ bc\,x + ac\,y - 2ab\,z = 0 \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{ll} -2bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 & \\ 3bc\,x - 3ac\,y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 + L_1 \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} -2bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 \\ b\,x = a\,y \end{array} \right. \iff \exists t \in \mathbb{R}\ ; \left\{ \begin{array}{l} ab\,z = 2bc\,x - ac\,y \\ y = b\,t \\ x = a\,t \end{array} \right.$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}\ ; \left\{ \begin{array}{l} x = a\,t \\ y = b\,t \\ z = 2c/a \cdot x - c/b\,y \end{array} \right. \iff \exists t \in \mathbb{R}\ ; \left\{ \begin{array}{l} x = a\,t \\ y = b\,t \\ z = c\,t \end{array} \right.$

On choisit $U_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors $\boxed{E_3(M) = \mathrm{Vect}(U_1) \text{ est de dimension 1}}$.

- $U \in E_0(M) \iff MU = \mathbb{O}_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + a/b \cdot y + a/c \cdot z & = & 0 \\ b/a \cdot x + y + b/c \cdot z & = & 0 \\ c/a \cdot x + c/b \cdot y + z & = & 0 \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 \\ bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 \\ bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 \end{array} \right. \iff \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0$

On reconnaît une équation de plan vectoriel. Donc $\boxed{E_0(M) \text{ est de dimension 2}}$
Pour obtenir une base de $E_0(M)$, il suffit de choisir deux vecteurs de $E_0(M)$ qui ne sont pas colinéaires. Par exemple, en prenant $U_2 = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$, on voit que $U_2 \nparallel U_3$. D'où $E_0(M) = \mathrm{Vect}(U_2, U_3)$.

(b) La somme des dimensions des sous-espaces propres de M est égale à 3 qui est aussi l'ordre de M. La matrice M est donc diagonalisable.

4. (a) $PQ = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,I_3$

D'où $P\left(\dfrac{1}{3}Q\right) = I_3$. Donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{3}Q}$

(b) On remarque que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3). Donc, en posant $D = \mathrm{diag}(3, 0, 0)$, on obtient

$$\boxed{M = P\,D\,P^{-1} = \frac{1}{3} P\,D\,Q}$$

Exercice 2 On pose $I =]0\,,\,+\infty[= \mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ u_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I revient à montrer que, pour tout réel $x > 0$, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente. On se fixe un réel x strictement positif.

• **Première méthode**. Comme $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -x\sqrt{n} = -\infty$. De plus $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$.
D'où, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 0$.

La suite réelle $\left(\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement **positive** et **converge vers zéro**.
Montrons qu'elle est **décroissante**.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n+1}}}{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}} = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n+1}+x\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{x\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)}$$

Or $n < n+1 \Longrightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Longrightarrow x\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) < 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{x\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)} < 1$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^{-x\sqrt{n+1}} < \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

Ainsi, d'après le *critère spécial des séries alternées*, la série numérique $\sum (-1)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est convergente.

• **Seconde méthode**. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n^2\,|u_n(x)| = n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \sqrt{n}^4\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \dfrac{1}{x^4} \times \dfrac{\left(x\sqrt{n}\right)^4}{\mathrm{e}^{x\sqrt{n}}}$

Or comme $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x\sqrt{n} = +\infty$ et par *croissance comparée* $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^4}{\mathrm{e}^t} = 0$

D'où, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(x\sqrt{n}\right)^4}{\mathrm{e}^{x\sqrt{n}}} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\,|u_n(x)| = 0$ avec $2 > 1$.

Ainsi, d'après le *critère de Riemann*, la série numérique $\sum |u_n(x)|$ est convergente, ce qui signifie par définition, que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
Ainsi la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.

2. (a) Chaque fonction u_n est dérivable sur I et
$\forall\, x \in I,\ u_n'(x) = (-1)^n\left(-\sqrt{n}\right)\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = (-1)^{n+1}\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$
D'où $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a,b],\quad \left|u_n'(x)\right| = \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$
Or $\sqrt{n} > 0$ et $x \geqslant a \Longrightarrow x\sqrt{n} \geqslant a\sqrt{n} \Longrightarrow -x\sqrt{n} \leqslant -a\sqrt{n} \Longrightarrow \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$

Donc $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a,b],\quad \left|u_n'(x)\right| \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}}$

On pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$. Alors $\alpha_n \geqslant 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n^{3/2}\,\alpha_n = n^2\,\mathrm{e}^{-a\sqrt{n}} = \frac{1}{a^4} \times \frac{\left(a\sqrt{n}\right)^4}{\mathrm{e}^{a\sqrt{n}}}$$

Or comme $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a\sqrt{n} = +\infty$ et par *croissance comparée* $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^4}{\mathrm{e}^t} = 0$

D'où, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(a\sqrt{n}\right)^4}{\mathrm{e}^{a\sqrt{n}}} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}\,\alpha_n = 0$ avec $3/2 > 1$.

Ainsi, d'après le *critère de Riemann*, la série numérique $\sum \alpha_n$ est convergente.

Finalement la série des dérivées $\sum u_n'$ converge normalement sur le segment $[a,b]$.

(b) On pose pour tout réel $x > 0$, $\quad S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

(i) Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur I.

(ii) On a vu à la question 1., que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur I.

(iii) On a vu à la question 2.(a), que la série des dérivées $\sum u_n'$ convergeait normalement, a fortiori uniformément, sur tout segment inclus dans I.

Le *théorème de dérivation terme à terme* permet de conclure que la fonction somme S est de classe C^1 sur I et que

$$\forall\, x \in I,\ \boxed{S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}$$

3. On se fixe un réel $x > 0$. On a vu précédemment en 1. que la suite suite réelle $\left(\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ était positive, décroissante et de limite nulle. Donc, d'après le *critère spécial des séries alternées*, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}$, on sait que

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$$

En particulier, pour $n = 0$, on obtient : $\left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\right| \leqslant |u_1(x)|$

c'est-à-dire $|S(x) - 1| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi $\forall\, x \in I$, $\boxed{1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$. Donc, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 1}$

Exercice 3 $E = \mathbb{R}_2[X]$

1. Soit P, Q et R trois polynômes de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   - Linéarité par rapport à la première variable.

     $\varphi(\lambda P + Q, R) = \int_0^1 (\lambda P + Q)'(t)\, R'(t)\, \mathrm{d}t + (\lambda P + Q)(0)\, R(0)$

     $= \int_0^1 (\lambda P' + Q')(t)\, R'(t)\, \mathrm{d}t + (\lambda P(0) + Q(0))\, R(0)$ par *linéarité de la dérivation*

     $= \int_0^1 (\lambda P'(t) + Q'(t))\, R'(t)\, \mathrm{d}t + \lambda P(0)\, R(0) + Q(0)\, R(0)$

     $= \int_0^1 (\lambda P'(t)\, R'(t) + Q'(t)\, R'(t))\, \mathrm{d}t + \lambda P(0)\, R(0) + Q(0)\, R(0)$

     $= \lambda \int_0^1 P'(t)\, R'(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^1 Q'(t)\, R'(t)\, \mathrm{d}t + \lambda P(0)\, R(0) + Q(0)\, R(0)$ par *linéarité de l'intégrale*.

     $= \lambda\left(\int_0^1 P'(t)\, R'(t)\, \mathrm{d}t + P(0)\, R(0)\right) + \left(\int_0^1 Q'(t)\, R'(t)\, \mathrm{d}t + Q(0)\, R(0)\right)$

     Ainsi $\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$

   - Symétrie.

     $\varphi(Q, P) = \int_0^1 Q'(t)\, P'(t)\, \mathrm{d}t + Q(0)\, P(0) = \int_0^1 P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t + P(0)\, Q(0) = \varphi(P, Q)$.

   - Positivité. $\varphi(P, P) = \int_0^1 P'(t)^2\, \mathrm{d}t + P(0)^2$. En tant que fonction polynôme, la fonction $t \mapsto P'(t)^2$ est continue et positive sur $[0\,,\,1]$. Donc par *positivité de l'intégrale*, $\int_0^1 P'(t)^2\, \mathrm{d}t \geqslant 0$. De plus $P(0)^2 \geqslant 0$. Ainsi $\varphi(P, P) \geqslant 0$.

   - Définie positivité. On suppose que $\varphi(P, P) = 0$. On sait qu'une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chacun de ses termes est nul.

     Donc $\int_0^1 P'(t)^2\, \mathrm{d}t = 0$ et $P(0)^2 = 0$.

     Or la fonction $t \mapsto P'(t)^2$ est **continue** et positive sur l'intervalle $[0\,,\,1]$.
     Donc d'après le *théorème de positivité stricte* : $\forall\, t \in [0\,,\,1],\ P'(t)^2 = 0$
     D'où $\forall\, t \in [0\,,\,1],\ P'(t) = 0$ puis P' est une fonction constante sur $[0\,,\,1]$, égale à $P(0)$. Or $P(0)^2 = 0 \Longrightarrow P(0) = 0$. Ainsi $\forall\, t \in [0\,,\,1], P(t) = 0$.
     Comme P est un polynôme admettant une infinité de racines (au moins tous les réels de $[0\,,\,1]$), P ne peut être que le polynôme nul. Finalement $P = \mathbb{0}$.

   $\boxed{\varphi \text{ définit bien un produit scalaire sur } E}$

2. On rappelle que $(\mathbb{1}, X)$ est la base canonique de $F = \mathbb{R}_1[X]$.

   - $\langle \mathbb{1} \mid X \rangle = \int_0^1 0 \times 1\, \mathrm{d}t + 1 \times 0 = 0$. Donc $(\mathbb{1}, X)$ est une base orthogonale de F.
   - $\langle \mathbb{1} \mid \mathbb{1} \rangle = \int_0^1 0 \times 0\, \mathrm{d}t + 1 \times 1 = 1$ et $\langle X \mid X \rangle = \int_0^1 1 \times 1\, \mathrm{d}t + 0 \times 0 = 1$

   Donc $(\mathbb{1}, X)$ est une base orthonormale de F.

3. (a) Le projeté orthogonal du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel F est :

   $$p_F(X^2) = \left\langle X^2 \mid \mathbb{1} \right\rangle \cdot \mathbb{1} + \left\langle X^2 \mid X \right\rangle \cdot X$$

   avec $\left\langle X^2 \mid \mathbb{1} \right\rangle = \int_0^1 2t \times 0\, \mathrm{d}t + 0^2 \times 1 = 0$ et

   $\left\langle X^2 \mid X \right\rangle = \int_0^1 2t \times 1\, \mathrm{d}t + 0^2 \times 0 = \int_0^1 2t\, \mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

   Donc $\boxed{p_F(X^2) = X}$

   (b) On sait que $d(X^2, F) = \left\| X^2 - p_F(X^2) \right\| = \left\| X^2 - X \right\|$

   Or $\left\| X^2 - X \right\|^2 = \left\| X^2 \right\|^2 + \|X\|^2 - 2\left\langle X^2 \mid X \right\rangle = \left\langle X^2 \mid X^2 \right\rangle + \langle X \mid X \rangle - 2\left\langle X^2 \mid X \right\rangle$

   $= \left(\int_0^1 2t \times 2t\, \mathrm{d}t + 0^2 \times 0^2\right) + 1 - 2 \times 1 = 4\int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t - 1 = 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 1 = \frac{1}{3}$

   Donc $\boxed{d(X^2, F) = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

4. On applique l'algorithme d'**orthonormalisation de Gram-Schmidt** à la base canonique de E. On construit d'abord une *base orthogonale* $(\mathbb{1}, X, G_3)$ de E en posant

   $$G_3 = X^2 - p_F(X^2) = X^2 - X$$

   Il reste à normaliser ce vecteur en prenant $Q_3 = \frac{1}{\|G_3\|} G_3$.

   Or on a vu à la question précédente que $\|G_3\| = \left\| X^2 - X \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

   Donc $\boxed{Q_3 = \sqrt{3}\left(X^2 - X\right)}$

   $(\mathbb{1}, X, Q_3)$ est bien une base orthonormée de E.