Examen final - MTC

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Exercice 1 (5 points)

Soient a, b, c trois réels **tous non nuls**. On considère la matrice M carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cet exercice, on ne cherchera pas à calculer le polynôme caractéristique de la matrice M.

1. (a) Calculer M^2 et donner le nombre réel k tel que $M^2 = k\,M$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de M.
   Quelles sont les éventuelles valeurs propres de M ?
2. Déterminer le rang de la matrice M. En déduire une valeur propre de M.
3. On admet que M a deux valeurs propres distinctes.
   (a) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de M.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}
   (b) Diagonaliser la matrice M en l'exprimant en fonction de P, D et Q.

Exercice 2 (5 points)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n sur l'intervalle $I =]0\,,+\infty[= \mathbb{R}^{+*}$ par

$$u_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I.
2. On pose pour tout réel $x > 0$, $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   (a) Prouver que la série des dérivées $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.
   (b) En déduire que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
   Exprimer $S'(x)$ sous la forme d'une somme de série.
3. En remarquant que $S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$, déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application φ définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\,(P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)\,Q(0)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. On notera dorénavant $\langle P \mid Q\rangle$ au lieu de $\varphi(P,Q)$. On désigne par $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
   On rappelle que F est de dimension 2.

   Vérifier que $(\mathbb{1}, X)$ est une base orthonormale de F.
3. (a) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel F.
   (b) En déduire la distance $d(X^2, F)$ du polynôme X^2 au sous-espace vectoriel F.
4. Trouver un troisième polynôme Q_3 tel que $(\mathbb{1}, X, Q_3)$ soit une base orthonormée de E.

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des 5 questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.
On demande d'indiquer laquelle sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Les questions laissées sans réponse ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

1. Soit x et y deux réels. On considère le déterminant $d = \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$.

   (a) $d = (x-y)^2(x+2y)$
   (b) Si $d = 0$ alors $x = y$
   (c) $d = (x+2y)(x-y)$
   (d) Si $x = 2y$ alors $d = 0$

2. On considère une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = -X^3 + X^2 + X - 1$. Alors A ...

   (a) n'est pas inversible
   (b) est inversible
   (c) est diagonalisable
   (d) n'est pas diagonalisable

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, **et seulement si**,

   (a) $\alpha = 1$ (b) $\alpha \geqslant 2$ (c) $0 < \alpha < 1$ (d) $\alpha > 1$

4. Parmi les quatre séries ci-dessous, une seule est divergente. Laquelle ?

   (a) $\sum \frac{(2n)!}{5^n\,(n!)^2}$ (b) $\sum \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ (c) $\sum n\,\mathrm{e}^{-n}$ (d) $\sum \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$

5. Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $\langle . \mid . \rangle$ et de norme associée $\|.\|$
   Pour tous vecteurs u et w de E, $\langle u \mid w\rangle = \ldots$

   (a) $\frac{1}{2}\left(\|u-w\|^2 - \|u\|^2 - \|w\|^2\right)$
   (b) $\frac{1}{2}\left(\|u+w\|^2 + \|u\|^2 + \|w\|^2\right)$
   (c) $\frac{1}{4}\left(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2\right)$
   (d) $\|u\| \times \|w\|$