Corrigé final - MTC

Exercice 1 Soient $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

1. $\chi_A(X) = \det(A - X\,I_2) = \begin{vmatrix} k-X & 0 \\ (k+1)^2 & -1-X \end{vmatrix} = (k-X)(-1-X)$

   $\chi_A(X)$ admet deux racines distinctes : k et -1.
   La matrice A admet donc pour valeurs propres -1 et k. Comme A est d'ordre 2 avec **2 valeurs propres distinctes**, A est diagonalisable.

2. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

   - $U \in E_{-1}(A) \iff AU = -U \iff \begin{cases} kx &= -x \\ (k+1)^2 x - y &= -y \end{cases}$

     $\iff \begin{cases} (k+1)x = 0 \\ (k+1)^2 x = 0 \end{cases} \iff x = 0 \quad$ car $k+1 \neq 0$

     On choisit $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(U_1) \text{ est de dimension } 1}$.

   - $U \in E_k(A) \iff AU = k\,U \iff \begin{cases} k\,x &= k\,x \\ (k+1)^2 x - y &= k\,y \end{cases}$

     $\iff (k+1)^2 x = (k+1)y \iff y = (k+1)x \quad$ car $k+1 \neq 0$

     On choisit $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \end{pmatrix}$. Alors $\boxed{E_k(A) = \mathrm{Vect}(U_2) \text{ est de dimension } 1}$.

3. On désigne par P la matrice de passage de la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vers la base de vecteurs propres (U_1, U_2). Alors $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$

   Donc, en posant $D = \mathrm{diag}(-1, k)$, on obtient $\boxed{A = P\,D\,P^{-1}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ par une récurrence immédiate.

   Avec $D^n = \mathrm{diag}((-1)^n, k^n)$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \cdot {}^t\,(\mathrm{com}\ P)$

   où $\det(P) = -1$, $\quad \mathrm{com}\ (P) = \begin{pmatrix} k+1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -(k+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   De plus, $P\,D^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k^n \\ (-1)^n & (k+1)k^n \end{pmatrix}$

   Enfin $A^n = (P\,D^n)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & k^n \\ (-1)^n & (k+1)k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(k+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   $$A^n = \begin{pmatrix} k^n & 0 \\ (k+1)(k^n - (-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2 $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge} \right\}$

1. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $(|x| - |y|)^2 \geqslant 0$ d'où $|x|^2 + |y|^2 \geqslant 2|x|\,|y|$.
   Or $|x|^2 = x^2$ et $|x|\,|y| = |xy|$. Ainsi $\boxed{|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x^2\right)}$.

   (b) Soient $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites appartenant à E.
   D'après l'inégalité précédente, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n\,w_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + w_n^2\right)$
   Or les séries $\sum u_n^2$ et $\sum w_n^2$ convergent. Donc la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + w_n^2\right)$ est convergente. Ainsi d'après le *critère de comparaison*, la série positive $\sum |u_n\,w_n|$ est convergente, ce qui signifie que la série $\sum u_n\,w_n$ est absolument convergente.

2. $\forall\,(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in E^2, \quad \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,w_n$

   (a) Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois suites de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Existence. Le réel $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ est bien défini par convergence absolue de la série $\sum u_n\,w_n$.
   - Linéarité par rapport à la première variable.
     $\varphi(\lambda\,\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\,u_n + v_n) w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\,u_n\,w_n + v_n\,w_n)$
     $= \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,w_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\,w_n.$
     Ainsi $\varphi(\lambda\,\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda\,\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
   - Symétrie. $\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\,u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,w_n = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.
   - Positivité. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant u_0^2 \geqslant 0$ c.à.d $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0$

- Définie positivité par contraposée. On suppose que $\mathbf{u}$ est non nulle. Alors $\exists p \in \mathbb{N}$; $u_p \neq 0$. D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant u_p^2 > 0$. Donc $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) \neq 0$

Finalement $\boxed{\varphi \text{ définit bien un produit scalaire sur } E}$

(b) Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E.
On définit la suite $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n^2 = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(2^n)^2} = \dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
Or la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ est convergente car $0 < \dfrac{1}{4} < 1$.
Donc la série $\sum w_n^2$ converge, ce qui signifie que $\mathbf{w} \in E$.
Ainsi, en appliquant le résultat de 1.(b), on obtient la convergence (absolue) de la série $\sum \dfrac{u_n}{2^n}$.

(c) D'après l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, $|\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

c'est-à-dire $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}}$

Avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

Donc $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$. Il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, les suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ sont liées. Ainsi le plus petit réel $A > 0$ vérifiant

$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\quad \left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant A\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$ est $\boxed{A = \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

Exercice 3 $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\quad u_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$

1. On se fixe un réel $x > -1$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n + x > n - 1 \geqslant 0$.
D'où $|u_n(x)| = \dfrac{|x|}{n(n+x)} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$
Or les séries $\sum \dfrac{|x|}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont de même nature et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente car $2 > 1$.
Donc, d'après *le critère d'équivalence*, la série numérique $\sum |u_n(x)|$ est convergente ce qui revient à dire que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
Par conséquent la série $\sum u_n(x)$ est convergente pour tout réel $x \in I$.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement** sur I.

On pose $\quad \forall x \in I,\ \boxed{S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)}$

2. (a) Soit a un réel tel que $a > -1$.
La fonction rationnelle $u_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ est dérivable sur son ensemble de définition I et $\quad \forall x \in I,\ u_n'(x) = -\dfrac{(-1)}{(n+x)^2} = \dfrac{1}{(n+x)^2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a\,,+\infty[,\ |u_n'(x)| = u_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{(n+a)^2}$

Or $\dfrac{1}{(n+a)^2} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

Donc la série numérique $\sum \dfrac{1}{(n+a)^2}$ est convergente. Ainsi la série des dérivées $\sum u_n'$ **converge normalement** sur l'intervalle fermé $[a\,,+\infty[$.

(b) (i) chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
(ii) d'après la question 1, la série $\sum u_n$ converge simplement sur I,
(iii) d'après la question précédente, la série des dérivées $\sum u_n'$ converge normalement (a fortiori uniformément) sur chaque intervalle $[a\,,+\infty[$ où $a > -1$. Donc $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Ainsi, le *théorème de dérivation terme à terme* permet de conclure que la fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I,\quad \boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}}$$

3. (a) Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+(x+1)}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1+x}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+x}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)+x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x} \\
&= -\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j+x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x} \text{ par changement d'indice } j=k+1 \\
&= -\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j+x} - \frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{1+x} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+x} \\
&= -\frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{1+x} \text{ par télescopage}
\end{aligned}$$

(b) À x réel fixé de I, on passe à la limite dans l'égalité ci-dessus, **en faisant tendre** n **vers** $+\infty$. On obtient alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = 0 + \frac{1}{1+x}$

c'est-à-dire : $\boxed{S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{1+x}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(0) = 0$ d'où $S(0) = 0$.

En prenant $x = 0$ dans l'égalité établie en 3.(c), il vient $S(1) - S(0) = \dfrac{1}{1+0}$

donc $S(1) = 1$.

(d) $\forall x \in I,\ (x+1)S(x) = (x+1)\,S(x+1) - 1$

Or $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} x+1 = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} S(t) = S(0)$ car S est continue en zéro.

Donc, par composition, $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} S(x+1) = S(0) = 0$

puis $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} (x+1)S(x) = -1$

On en déduit que $\boxed{S(x) \underset{(x\to(-1)^+)}{\sim} -\dfrac{1}{1+x}}$

4. (a) Soit $x \in I$.

On a vu que $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$

Donc $S'(x) \geqslant u_1'(x) > 0$. Ainsi S est **strictement** croissante sur I.

Variante : soient a et b deux réels appartenant à I tels que $-1 < a < b$. Alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant k-1 < k+a < k+b \Longrightarrow \frac{1}{k+a} > \frac{1}{k+b} \Longrightarrow -\frac{1}{k+a} < -\frac{1}{k+b}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+b} \Longrightarrow u_k(a) < u_k(b)$$

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k(a) < \sum_{k=2}^{n} u_k(b)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'inégalité **large** : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(a) \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(b)$

Or $u_1(a) < u_1(b)$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(a) < \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(b)$. Ainsi $S(a) < S(b)$

(b) Montrons **par récurrence** sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

- $S(1) = 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

  On sait d'après 3.(b) que $S(n+1) - S(n) = \dfrac{1}{1+n}$.

  D'où $S(n+1) = S(n) + \dfrac{1}{n+1} \overset{\text{(hyp de rec)}}{=} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$
- Le principe de récurrence permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

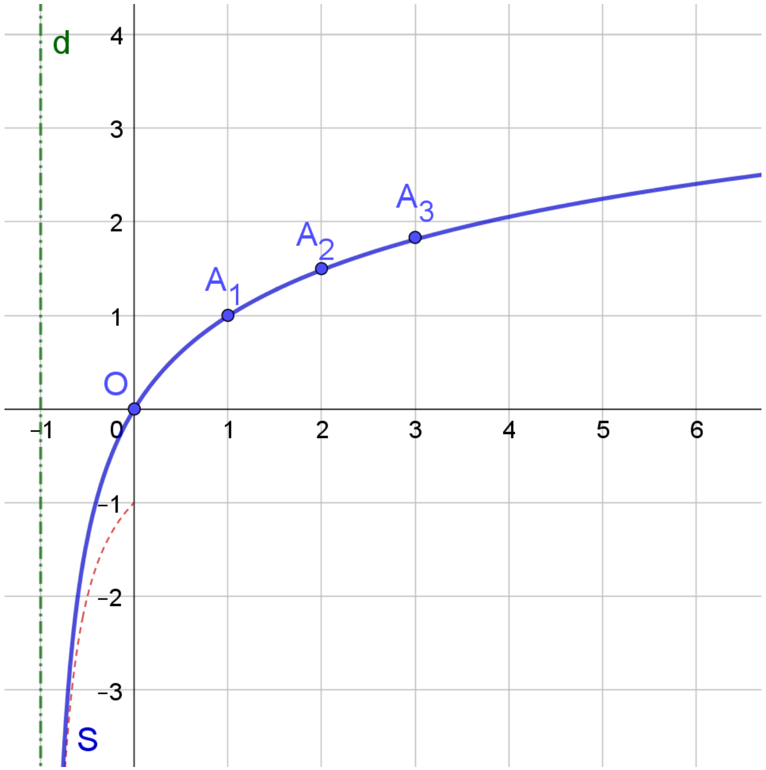
(c) La fonction S étant croissante sur l'intervalle ouvert $]-1\,,+\infty[$, elle admet une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$ selon le *théorème de la limite monotone.*

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} S(n) = +\infty$ puis $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty}$.

On pourrait aussi démontrer que $S(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \ln x$

Représentation graphique de S :



Exercice 4

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice de déterminant -1.
   Alors $\det(A^2) = \det(A) \times \det(A) = 1$.

2. Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont -1 et 2. Alors il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-1, -1, \dots, -1, 2, 2, \dots, 2)$.
   D'où $B^2 - B = P\,D^2\,P^{-1} - P\,D\,P^{-1} = P\,(D^2 - D)\,P^{-1}$.
   Or $(-1)^2 - (-1) = 2$ et $2^2 - 2 = 2$. Donc $D^2 - D = 2\,I_n$.
   Finalement $B^2 - B = P(2\,I_n)P^{-1} = 2\,I_n$ est une matrice diagonale.

3. La série $\sum n\,\mathrm{e}^{-n}$ est de même nature que la série de terme général $\mathrm{e} \times n\,\mathrm{e}^{-n} = n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}$ On reconnaît la série dérivée de la série géométrique de raison $q = \frac{1}{\mathrm{e}}$ avec $0 < q < 1$. Donc la série $\sum n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{(1-1/\mathrm{e})^2} = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$$

4. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ **si, et seulement si**, il existe un réel positif λ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$, c'est-à-dire si x et y sont positivement colinéaires.

5. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\,,\ \forall t \in [0\,, +\infty[,\quad f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$

   - pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel $t \in [0, 1]$,
     $t^n \geqslant 0 \Rightarrow 1 + t^n \geqslant 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$
     De plus $0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2 \Rightarrow \frac{2}{1+t^2} \geqslant 1$
   - pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel $t \in]1\,, +\infty[$,
     $t^{n-2} \geqslant 1 \Rightarrow t^n \geqslant t^2 \Rightarrow 1 + t^n \geqslant 1 + t^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2}$

   On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\,,\ \forall t \in [0\,, +\infty[,\quad |f_n(t)| = \frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{2}{1+t^2}$

   La fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{2}{1+t^2}$ est positive, continue et **intégrable** sur $[0\,, +\infty[$ car $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [2\arctan t]_0^x = 2\,\arctan x \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} \pi$