Examen final - MTC

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Exercice 1 : puissance n-ième d'une matrice carrée ($3,5$ points)

Soit k un nombre réel fixé tel que $k \neq -1$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.
   Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
3. Donner une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
4. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : séries numériques et produit scalaire (5 points)

On note E l'ensemble des suites $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

1. (a) Prouver que pour tous réels x et y, $|x\,y| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$
   (b) En déduire que si $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites appartenant à E, alors la série $\sum u_n\,w_n$ est absolument convergente.
2. On admet que E, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
   On considère l'application φ qui associe à tout couple $(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{w}) \in E^2$, le nombre réel

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,w_n$$

   (a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$
   (b) Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E.
   Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ appartient à E.
   En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{u_n}{2^n}$.
   (c) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer le plus petit réel $A > 0$ tel que

$$\forall\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant A\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$$

Exercice 3 : série de fonctions (6,5 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction u_n sur l'intervalle ouvert $I =]-1\,,\,+\infty[$ par

$$u_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I.

   On note S la fonction définie sur I par : $\forall\, x \in I,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

2. (a) Soit a un réel tel que $a > -1$.
   Prouver que la série des dérivées $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a\,,\,+\infty[$.

   (b) En déduire que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
   et exprimer $S'(x)$ sous la forme d'une somme de série.

3. (a) Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   À l'aide d'un télescopage, simplifier la différence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$

   (b) En déduire que pour tout réel $x \in I$, $\quad S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{1+x}$

   (c) Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1)S(x)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x tend vers -1.

4. (a) Justifier que S est strictement croissante sur l'intervalle I.

   (b) Prouver, en utilisant l'égalité de 3.(b), que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   (c) En déduire la limite de S en $+\infty$.

Exercice 4 : QCM (5 points)

Pour chacune des 5 questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice de déterminant -1.
   Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que A ?

   (a) $\mathrm{com}(A)$ (b) A^{-1} (c) $-A$ (d) A^2

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont -1 et 2. Alors $B^2 - B = \dots$

   (a) $-2\,I_n$ (b) I_n (c) $(-\det B)\,I_n$ (d) $2\,I_n$

3. Parmi les quatre séries ci-dessous, une seule est convergente. Laquelle ?

   (a) $\sum \sin \dfrac{1}{n}$ (b) $\sum \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (c) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}$ (d) $\sum n\,\mathrm{e}^{-n}$

4. Soient x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.
   On a l'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ **si, et seulement si**,

(a) x et y sont égaux

(b) x et y sont orthogonaux

(c) x et y sont liés

(d) x et y sont positivement colinéaires

5. On considère la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$
On souhaite déterminer la limite de cette suite.
Quelle fonction dominante φ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée ?

(a) $t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$

(b) $t \longmapsto 1$

(c) $t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ \dfrac{1}{t^n} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$

(d) $t \longmapsto \dfrac{2}{1+t^2}$