Exercice 1

Pour toute matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on définit l'ensemble suivant :

$$F(A) = \left\{ M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \ \middle| \ AM = M \right\}$$

1. - $\mathbb{O}_3 \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et $A\,\mathbb{O}_3 = \mathbb{O}_3$ donc $\mathbb{O}_3 \in F(A)$.
   - Soient M et N deux matrices appartenant à $F(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
     Alors $AM = M$ et $AN = N$.
     De plus $\lambda M + N$ est une matrice carrée d'ordre n.
     D'où $A(\lambda M + N) = \lambda (AM) + AN = \lambda M + N$. Donc $\big(\lambda M + N\big) \in F(A)$.

   Ainsi $F(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a)

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & -2 & -1 \\ 1 & -X & -1 \\ 2 & -2 & -X \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} -X & -2 & -1 \\ -X & -X & -1 \\ -X & -2 & -X \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= -X \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -X(2-X)(1-X)
\end{aligned}$$

Donc A admet 3 valeurs propres simples qui sont 0, 1, et 2. En particulier, A est diagonalisable.

(b) Déterminons les sous-espaces propres de A :

Calcul de $E_0(A) = \ker A$: soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_0(A)$

$$AU = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} 3a - 2b - c &= 0 \\ a - c &= 0 \\ 2a - 2b &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ a = c \end{cases}$$

Ce qui montre que $U = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$, et donc $E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Calcul de $E_1(A) = \ker(A - I_3)$: soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1(A)$

$$(A - I_3)U = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} 2a - 2b - c &= 0 \\ a - b - c &= 0 \\ 2a - 2b - c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$$

Ce qui montre que $U = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Calcul de $E_2(A) = \ker(A - 2I_3)$: soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2(A)$

$$(A - 2I_3)U = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} a - 2b - c &= 0 \\ a - 2b - c &= 0 \\ 2a - 2b - 2c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases}$$

Ce qui montre que $U = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, et donc $E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(c) D'après la formule du changement de base, on a donc $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} M \in F(A) &\iff AM = M \\ &\iff PDP^{-1}M = M \\ &\iff \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} D \underbrace{P^{-1}M}_{N} = P^{-1}M \\ &\iff DN = N \\ &\iff N \in F(D) \end{aligned}$$

(b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\text{Alors } DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$N \in F(D) \iff DN = N \iff a = b = c = g = h = i = 0$$

(c) On considère les matrices suivantes extraites de la base canonique de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question précédente, $F(D) = \mathrm{Vect}(E_{21}\,,\, E_{22}\,,\, E_{23})$.
Donc $(E_{21}\,,\, E_{22}\,,\, E_{23})$ est une base de $F(D)$.
Ainsi $(PE_{21}\,,\, PE_{22}\,,\, PE_{23})$ est une base de $F(A)$.
On voit apparaître une base de $F(A)$ qui contient 3 vecteurs, finalement $\dim F(A) = 3$.

Exercice 2

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ en posant $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Or la **série de Riemann** $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\alpha \leqslant 1$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

(b) On se fixe un réel x strictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{\sqrt{n}} \leqslant (\mathrm{e}^{-x})^n}$

car $\quad n \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 \quad$ et $\quad \mathrm{e}^{-n\,x} = (\mathrm{e}^{-x})^n > 0$.

Or la **série géométrique** $\sum (\mathrm{e}^{-x})^n$ est convergente
car $\quad x > 0 \Longrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$

Donc d'après le critère de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

2. (a) $\forall\, u > 0, \quad u^{3/2} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \right) = u\, \mathrm{e}^{-u} = \dfrac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^u}{u} \right)}$

Or par **croissance comparée** $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$.

Donc $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} u^{3/2} \left(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \right) = 0^+$

(b) La fonction $\; g : u \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est *continue* et *positive* sur l'intervalle ouvert $]0\,,\, +\infty[$ avec $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} g(u) = +\infty$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$ est doublement généralisée : en $+\infty$ et en zéro.

- <u>Étude en $+\infty$</u>.
  On a vu à la question précédente que $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} u^{3/2}\, g(u) = 0$.
  Comme $3/2 > 1$, le **critère de Riemann** permet de conclure que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(u)\, \mathrm{d}u$ est convergente.

- <u>Étude en 0</u>. $\displaystyle\lim_{u \to 0} \mathrm{e}^{-u} = \mathrm{e}^0 = 1$ d'où $\qquad g(u) \underset{(u \to 0^+)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{u}}$

  Or l'**intégrale de Riemann** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^{1/2}}\, \mathrm{d}u$ converge car $\alpha = 1/2 < 1$

  Donc d'après le **critère d'équivalence**, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 g(u)\, \mathrm{d}u$ est convergente.

Par conséquent l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$ est convergente.

3. On se fixe $x > 0$. On pose $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}$ et $f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}$

(a) • Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est décroissante sur $[k\,,\,k+1]$.
D'où $\forall t \in [k\,,\,k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$. En intégrant membre à membre cette inégalité sur $[k\,,\,k+1]$ (f étant continue sur $[k\,,\,k+1]$), on obtient

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$$

avec $\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t = f(k)((k+1)-k) = f(k)$.

Donc $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. La fonction f est décroissante sur $[k-1\,,\,k]$.
D'où $\forall t \in [k-1\,,\,k]$, $f(k) \leqslant f(t)$. En intégrant membre à membre cette inégalité sur $[k-1\,,\,k]$, on obtient : $\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$

avec $\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$. Donc $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
En sommant les inégalités prouvées à la question précédente, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, d'après la relation de Chasles relative aux intégrales,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$\boxed{\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Nous venons de redémontrer le théorème «lien séries-intégrales».
L'encadrement précédent est valable pour tout entier $n \geqslant 2$.

De plus, on a admis que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ était convergente.
Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \int_1^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{\frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)}_{S(x)} \leqslant \underbrace{f(1)}_{\mathrm{e}^{-x}} + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) Soit A un réel supérieur à 1. On procède à un **changement de variable** dans l'intégrale $\int_1^{A} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $\boxed{u = x\,t}$. Alors $t = \frac{u}{x}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u$.
La fonction $t \mapsto x\,t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1\,,\,A]$ à valeurs dans $[x\,,\,x\,A]$,

$$\text{il vient :} \quad \int_1^{A} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x\,A} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u/x}}\,\frac{1}{x}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{x\,A} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, $x\,A \longrightarrow +\infty$. Or on sait que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergent.

$$\text{Donc} \quad \boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$$

$$\text{Ainsi} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant S(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

4. D'après l'encadrement précédent,

$$\forall\, x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{x}\,S(x) \leqslant \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x} + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Or $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x} = \sqrt{0}\,\mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim_{x\to0^+} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Donc d'après le **théorème des gendarmes**, $\boxed{\lim_{x\longrightarrow0^+} \sqrt{x}\,S(x) = \sqrt{\pi}}$

$$\text{ce qui revient à dire que} \quad S(x) \underset{(x\longrightarrow0^+)}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

Exercice 3

1. Soient $(f, g, h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Il est évident que φ est symétrique car:
   $$\varphi(g, f) = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(f, g).$$
   - Démontrons que φ est linéaire par rapport à la première variable :
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g, h) &= \int_{-1}^{1} (\lambda f + g)(t)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} (\lambda f(t)h(t) + g(t)h(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} g(t)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\varphi(f, h) + \varphi(g, h)\end{aligned}$$
   - Puisque $\forall t \in [-1\,,\,1],\ f^2(t) \geqslant 0$ et que f^2 est continue (car polynomiale) sur $[-1\,,\,1]$, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,
   $$\varphi(f, f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$
   et donc φ est positive.
   - Enfin supposons que $\varphi(f, f) = 0$. Alors
   $$\int_{-1}^{1} f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
   Donc, comme f^2 est une fonction continue sur $[-1\,,\,1]$, par stricte positivité de l'intégrale, $\forall t \in [-1\,,\,1],\ f^2(t) = 0$ donc la fonction f est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme f admettant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

   Finalement, φ est bilinéaire symétrique définie positive, il s'agit bien d'un produit scalaire sur E.

2. Si g est une fonction paire et que h est une fonction impaire, alors le produit gh est une fonction impaire. En particulier:
   $$\varphi(g, h) = \int_{-1}^{1} g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. (a) Soit $f \in E$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors:
   $$\widehat{f}(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = \widehat{f}(x).$$
   On a donc bien démontré que $\widehat{f} \in \mathcal{P}$.

   (b) Avec les mêmes notations qu'à la question précédente:
   $$\left(f - \widehat{f}\right)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$
   Donc:
   $$\left(f - \widehat{f}\right)(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) = -\left(f - \widehat{f}\right)(x).$$
   La fonction $f - \widehat{f}$ est donc impaire.

   (c) Soit u un vecteur quelconque de E et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Le projeté orthogonal $p_F(u)$ de u sur F est **caractérisé** par :
   $$v = p_F(u) \iff \begin{cases} v \in F & (1) \\ u - v \in F^{\perp} & (2) \end{cases}$$
   Ici, p est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$. En effet, on a prouvé la première condition à la question 3.(a) et la deuxième condition à la question 3.(b) puisque toute fonction impaire est orthogonale à l'ensemble des fonctions paires (question 2.).