Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(1)\,Q(1) + P'(1)\,Q'(1) + P''(1)\,Q''(1) \end{array}$

1. Soient P, Q et R trois polynômes appartenant à E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   - $\varphi(\lambda{\cdot}P{+}Q, R) = (\lambda{\cdot}P{+}Q)(1)\,R(1){+}(\lambda{\cdot}P{+}Q)'(1)\,R'(1){+}(\lambda{\cdot}P{+}Q)''(1)\,R''(1)$
   $= \big(\lambda\,P(1) + Q(1)\big)\,R(1) + \big(\lambda\,P'(1) + Q'(1)\big)\,R(1) + \big(\lambda\,P''(1) + Q''(1)\big)\,R(1)$
   $= \lambda\,P(1)R(1) + Q(1)R(1) + \lambda\,P'(1)R'(1) + Q'(1)R'(1) + \lambda\,P''(1)R''(1) + Q''(1)R''(1)$
   $= \lambda\big(P(1)\,R(1) + P'(1)\,R'(1) + P''(1)\,R''(1)\big) + \big(Q(1)\,R(1) + Q'(1)\,R'(1) + Q''(1)\,R''(1)\big)$
   $= \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
   - $$\begin{array}{rcl} \varphi(Q,P) & = & Q(1)\,P(1) + Q'(1)\,P'(1) + Q''(1)\,P''(1) \\ & = & P(1)\,Q(1) + P'(1)\,Q'(1) + P''(1)\,Q''(1) \\ & = & \varphi(P,Q) \end{array}$$
   - $\varphi(P,P) = P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2$ est la somme de 3 réels positifs ou nuls. D'où $\varphi(P,P) \geqslant 0$
   - On suppose que $\varphi(P,P) = 0$. Alors $P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 = 0$.
   Or pour qu'une somme de réels positifs soit nulle, il faut que chacun de ses termes soit égal à 0.
   Donc $P(1)^2 = P''(1)^2 = P''(1)^2 = 0$ puis $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$.
   Par conséquent le polynôme P est divisible par $(X-1)^3$ c'est-à-dire qu'il existe un polynôme S tel que $P = (X-1)^3\,S$. Comme $\deg(P) \leqslant 2$, on a nécessairement $S = 0$: sinon $\deg(P) = 3 + \deg(S)$ d'où $3 \leqslant \deg(P) \leqslant 2$, ce qui est **absurde**.
   Ainsi $P = 0$

   On conclut que φ est un produit scalaire sur E.

2. F admet pour base $(1\,,\,X)$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt en construisant d'abord une base orthogonale $(G_1\,,\,G_2)$ de F.

   • On pose $G_1 = 1$ et $G_2 = X - \dfrac{\langle X \mid G_1\rangle}{\langle G_1 \mid G_1\rangle}\,G_1$
   avec $\langle X \mid G_1\rangle = \langle X \mid 1\rangle = 1\times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$
   et $\langle G_1 \mid G_1\rangle = \langle 1 \mid 1\rangle = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$
   D'où $G_2 = X - 1$

   • On en déduit une base orthonormale $\mathscr{B} = (T_1\,,T_2)$ de F en posant :
   $T_1 = \dfrac{1}{\|G_1\|}G_1$ et $T_2 = \dfrac{1}{\|G_2\|}G_2$
   avec $\langle G_2 \mid G_2\rangle = G_2(1)^2 + G_2'(1)^2 + G_2''(1)^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$

   $$\text{Ainsi } T_1 = G_1 = 1 \quad \text{et} \quad T_2 = G_2 = X - 1$$

3. (a) Puisque $(T_1\,,\,T_2)$ est une base orthonormale de F, d'après le théorème de la projection orthogonale,
   $$P_F(X^2) = \langle X^2 \mid T_1\rangle\,T_1 + \langle X^2 \mid T_2\rangle\,T_2$$
   Or $\langle X^2 \mid T_1\rangle = \langle X^2 \mid 1\rangle = 1$ et $\langle X^2 \mid T_2\rangle = \langle X^2 \mid X-1\rangle = 0+2\times 1+0 = 2$

   Donc $P_F(X^2) = 1 + 2(X-1) = 2X - 1$

   (b) La distance de X^2 à F est :
   $$d(X^2,F) = \big\|X^2 - P_F(X^2)\big\| = \big\|X^2 - 2X + 1\big\|$$
   Posons $Q = X^2 - 2X + 1$. Alors $Q' = 2X - 2$ et $Q'' = 2$.
   D'où $\langle Q \mid Q\rangle = Q(1)^2 + Q'(1)^2 + Q''(1)^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4$.
   Finalement $d(X^2,F) = 2$

Exercice 2 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. $n \geqslant 1 \Longrightarrow 1 + \dfrac{1}{n} > 1 \Longrightarrow \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$.

   La série $\sum u_n$ qui a pour terme général $u_n = (-1)^n\,a_n$, est donc alternée.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $1 \leqslant n \leqslant n+1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow 1 < 1 + \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$
   $\Rightarrow 0 < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
   Donc $\forall\,n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < a_{n+1} < a_n$, ce qui signifie que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive et strictement décroissante.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$

  d'où, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

  Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro.

Ainsi, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ est convergente.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |u_n| = a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\ln(1+x) \underset{(x\to 0)}{\sim} x$

   Donc par composition de limites, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n}.$

   De plus la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente car $\alpha = 1 \geqslant 1.$

   Ainsi, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente, ce qui revient à dire que la série $\sum u_n$ **n'est pas absolument convergente** (elle est dite «semi-convergente»).

3. Selon le critère spécial des séries alternées, la somme $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est du signe du premier terme de la série, à savoir du signe de $u_1 = -\ln(2) < 0$. Donc $\boxed{S<0}$

Exercice 3

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur l'intervalle fermé $[0\,, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^x = \arctan x - \arctan(0) \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

   Donc, par définition, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle ouvert $]0\,, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \frac{n}{t(1+t^2)} \sin\left(\frac{t}{n}\right)$$

Chaque fonction f_n est continue sur $]0\,, +\infty[$.

- Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, t fixé. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t}{n} = 0$ et $\sin x \underset{(x\to 0)}{\sim} x$

  D'où, par composition $\sin\left(\dfrac{t}{n}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{t}{n}$

  Puis $\dfrac{n}{t(1+t^2)} \sin\left(\dfrac{t}{n}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{n}{t(1+t^2)}\,\dfrac{t}{n} = \dfrac{1}{1+t^2}$

  Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2}}$

- La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]0\,, +\infty[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$. Alors, d'après l'inégalité admise, $\left|\sin\left(\dfrac{t}{n}\right)\right| \leqslant \left|\dfrac{t}{n}\right|$

  c'est-à-dire $\left|\sin\left(\dfrac{t}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{t}{n}$

  Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, t \in]0\,, +\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{n}{t(1+t^2)}\,\dfrac{t}{n} = \dfrac{1}{1+t^2}$

  D'après la question 1., la fonction dominante $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive et **intégrable** sur $[0\,, +\infty[$, a fortiori sur $]0\,, +\infty[$

Le **théorème de convergence dominée** permet de conclure que les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,, +\infty[$ et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \mathrm{Tr}(M)\, I_n + M$$

1. (a) Le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, égale à $n \times n = n^2$.

   (b) • $\mathrm{Im}\, T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel de dimension 1. Donc $0 \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, T) \leqslant 1$.
   Or $\mathrm{Im}\, T \neq \{0\}$ car $T(I_n) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$.
   Par conséquent $\dim(\mathrm{Im}\, T) > 0$ puis $\mathrm{rg}(T) = \dim(\mathrm{Im}\, T) = 1$.

   • D'après le **théorème du rang**, $\dim\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\big) = \dim(\mathrm{Ker}\, T) + \mathrm{rg}(T)$
   d'où $n^2 = \dim(\mathrm{Ker}\, T) + 1$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\, T) = n^2 - 1}$

2. $\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = \mathrm{Tr}(M)\, I_2 + M$

   Pour obtenir la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$, on calcule les images par f des matrices de $\mathscr{B}$, en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$.

   - $f(E_1) = \mathrm{Tr}(E_1)\, I_2 + E_1 = 1\, I_2 + E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\, E_1 + E_4$
   - $f(E_2) = \mathrm{Tr}(E_2)\, I_2 + E_2 = 0\, I_2 + E_2 = \mathbb{O}_2 + E_2 = E_2$
   - $f(E_3) = \mathrm{Tr}(E_3)\, I_2 + E_3 = 0\, I_2 + E_3 = E_3$
   - $f(E_4) = \mathrm{Tr}(E_4)\, I_2 + E_4 = 1\, I_2 + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = E_1 + 2\, E_4$

   $$\text{On en déduit} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$\det(f) = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} \underset{C_1 \longleftarrow C_1 - \frac{1}{2} C_4}{=} \begin{vmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

   D'où $\det(f) = \dfrac{3}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = 3$

3. On revient au cas général où n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.

   (a) $f(I_n) = \mathrm{Tr}(I_n)\, I_n + I_n = n\, I_n + I_n = (n+1)\, I_n$.
   Comme $I_n \neq \mathbb{O}_n$, on en déduit que $(n+1)$ est une valeur propre de f et que le sous-espace propre associé $E_{n+1}(f) = \mathrm{Ker}\big(f - (n+1) I_n\big)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.

   (b) Montrer que 1 est valeur propre de f revient à trouver au moins une matrice non nulle $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = M$.

   $$f(M) = M \iff \mathrm{Tr}(M)\, I_n + M = M \iff \mathrm{Tr}(M)\, I_n = \mathbb{O}_n$$
   $$\iff \mathrm{Tr}(M) = 0 \iff M \in \mathrm{Ker}\, T$$

   On en déduit que 1 est une valeur propre de f et que le sous-espace propre associé $E_1(f)$ est égal au noyau de T.
   Ainsi $\dim(E_1(f)) = \dim(\mathrm{Ker}\, T) = n^2 - 1$.

4. L'endomorphisme f admet au moins deux valeurs propres distinctes

   $$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = n + 1$$

   On sait que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f)$ et $E_{\lambda_2}(f)$ sont en somme directe et que la somme directe $E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   D'où $\dim\big(E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)\big) \leqslant \dim(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$
   c'est-à-dire $\dim\big(E_{\lambda_1}(f)\big) + \dim\big(E_{\lambda_2}(f)\big) \leqslant n^2$
   puis $\dim\big(E_{\lambda_2}(f)\big) \leqslant n^2 - \dim\big(E_{\lambda_1}(f)\big) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$.
   Or on a toujours $\dim\big(E_{\lambda_2}(f)\big) \geqslant 1$. Par conséquent $\boxed{\dim\big(E_{\lambda_2}(f)\big) = 1}$

   Puisque $\dim\big(E_{\lambda_1}(f)\big) + \dim\big(E_{\lambda_2}(f)\big) = (n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$, on peut conclure d'une part que f n'admet pas d'autres valeurs propres que λ_1 et λ_2 , et d'autre part que f **est diagonalisable**.