Examen final - MTC1

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.
L'exercice 1 sera rendu sur une copie séparée des exercices 2, 3 et 4.

Exercice 1 : projection orthogonale (7 points)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à 2. On définit sur $E \times E$ l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (P, Q) & \longmapsto & P(1)\,Q(1) + P'(1)\,Q'(1) + P''(1)\,Q''(1) \end{array}$$

1. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

   Dans la suite de l'exercice, on écrira $\langle P \mid Q \rangle$ au lieu de $\varphi(P, Q)$.

2. Construire une base orthonormale $\mathscr{B} = (T_1\,, T_2)$ du sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1\,,\,X)$.
3. (a) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel F.
   (b) En déduire la distance de X^2 à F.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 : une série alternée (3 points)

On pose pour tout entier naturel n non nul, $\quad u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Cette série est-elle absolument convergente ? Justifier la réponse.
3. Quel est le signe de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$?

Exercice 3 : convergence dominée (3 points)

1. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{t(1+t^2)} \sin\left(\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}t$.

   En admettant que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 4 : diagonalisation (7 points)

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Pour toute matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle «*trace* de M», notée $\mathrm{Tr}(M)$, le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \qquad \text{(somme des coefficients diagnoaux de } M\text{)}$$

On admet que l'application $T : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $T(M) = \mathrm{Tr}(M)$, est linéaire.
On considère l'endomorphisme f de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \mathrm{Tr}(M)\, I_n + M$$

1. (a) Rappeler sans justification, la dimension de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que le rang de T est égal à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$.

2. On suppose *dans cette question uniquement*, que $n = 2$.
   On rappelle que la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{B} = (E_1\,,\, E_2\,,\, E_3\,,\, E_4)$ avec :

   $$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
   Calculer le déterminant de f.

3. On revient au cas général où n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.
   (a) Calculer $f(I_n)$. En déduire une valeur propre de f.
   (b) Prouver que 1 est valeur propre de f et donner la dimension du sous-espace propre $E_1(f)$ associé en utilisant le résultat de la question 1.(b)

4. $\star$ Déduire des questions 3.(a) et 3.(b) que l'endomorphisme f est diagonalisable.