Médian MT3 - A22

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier et sauf mention contraire, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1. On considère pour tout $a \in \mathbb{R}$ la matrice :

$$A_a = \begin{pmatrix} -a-2 & -2a-2 & 2a+2 \\ 2a+2 & 4a+3 & -4a-4 \\ a+1 & 2a+2 & -2a-3 \end{pmatrix}.$$

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a la matrice A_a est-elle inversible ?
2. On suppose dorénavant que $a = 0$ et on note A la matrice A_0.
   (a) On définit les matrices :

   $$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

   Démontrer que l'une est la matrice d'une symétrie et l'autre celle d'une projection (on ne demande pas de déterminer les éléments caractéristiques).

   (b) Calculer le produit PQ.

   (c) En admettant que $PQ = QP$, calculer A^3.

   (d) Interpréter géométriquement la matrice A.

Exercice 2. On définit les intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que I et J sont convergentes sans les calculer.
2. Calculer I à l'aide d'une intégration par parties. On pourra remarquer (après avoir intégré par parties) que :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

3. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, démontrer que $J = -I$ puis donner la valeur de J.

Correction 1.

1. On démontre facilement que $\det(A_a) = a$. Ainsi, A_a est inversible ssi $a \neq 0$.
2. On remarque que $P^2 = P$ et que $Q^2 = I_3$. On en déduit que P est une matrice de projection et que Q est une matrice de symétrie.
3. On trouve $PQ = A$.
4. Puisque les matrices commutent, on obtient $A^3 = P^3Q^3 = PQ = A$.
5. A est la composée d'une projection et d'une symétrie.

Correction 2.

1. On remarque que, au voisinage de 0 :
$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \sim \ln(t),$$
or l'intégrale sur $[0,1]$ de la fonction ln est convergente. Ainsi, d'après le critère d'équivalence (les fonctions étant négatives), on en déduit que I converge. Pour démontrer que J converge, on peut par exemple utiliser le critère de Riemann avec $\alpha = 3/2$ puisque, par croissances comparées :
$$t^{3/2}\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \sim \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Posons pour tout $t \in [\varepsilon, 1]$:
$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{(1+t)^{-2}} & u(t) = \frac{-1}{1+t} \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$
On obtient alors :
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)}{1+t}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{-1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon} + \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \\ &= \frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon} + \ln(1) - \ln(\varepsilon) - \ln(2) + \ln(1+\varepsilon) \\ &\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} -\ln(2)\end{aligned}$$
3. Soit $A > 1$ et :
$$J_A = \int_1^A \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$
Effectuons alors le changement de variable $u = 1/t$ dans J_A.
   - Nouvelles bornes.
$$\begin{cases} t = 1 \implies u = 1, \\ t = A \implies u = 1/A. \end{cases}$$
   - Intégrande.
$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2 = \frac{\ln(1/u)}{(1+1/u)^2}} = \frac{-\ln(u)}{\left(\frac{1+u}{u}\right)^2} = \frac{-u^2\ln(u)}{(1+u)^2}.$$
   - Terme différentiel.
$$u = \frac{1}{t} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2} = -u^2.$$

On en déduit finalement que :

$$\begin{aligned}
J_A &= \int_1^{1/A} \frac{-u^2 \ln(u)}{(1+u)^2} \times \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \int_1^{1/A} \frac{\ln(u)}{(1+u)^2} \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{0} \frac{\ln(u)}{(1+u)^2}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors $-I$ et on peut en déduire que $J = \ln(2)$.