Médian MT3F - A23

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. EN PARTICULIER ET SAUF MENTION CONTRAIRE, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE.

Exercice 1. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il s'agit de la matrice d'une symétrie et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$ et

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ -1 & m+1 & 3 \\ 2m & 2 & 1-m \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de M.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur m la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x,$$

où $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$.

1. En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, démontrer que pour tout $A > 1$:
$$\int_1^A \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{A}} \frac{\sin(\pi t)}{t^{2\alpha-1}}\, \mathrm{d}t.$$
2. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que pour tout $A > 1$:
$$\int_1^A \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x = 2\phi(A) - \psi(\alpha)\int_1^{\sqrt{A}} \frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\, \mathrm{d}t,$$
où $\phi(A)$ et $\psi(\alpha)$ sont deux quantités à déterminer.
3. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée :
$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\, \mathrm{d}t.$$
4. Étudier la limite éventuelle de $\phi(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.
5. Conclure.