Médian MT3F - A24

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. EN PARTICULIER ET SAUF MENTION CONTRAIRE, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de démontrer la convergence puis de calculer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

On notera $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$.

1. Rappeler la formule du développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$.
2. En déduire un équivalent de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $t > 0$, $f(t) = \ln(1+t^2) - 2\ln(t)$.
4. Déduire des questions précédentes la convergence de I.
5. Calculer I par intégration par parties.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 3-2a & 2-2a & 2-2a \\ -a & 1-a & -a \\ 4a-3 & 4a-3 & 4a-2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que M est inversible ssi $a \neq 0$.
2. On suppose dorénavant que $a = 0$. Démontrer que M est la matrice d'une projection dont on déterminera les éléments caractéristiques.