Sujet A

1

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,dt$ est-elle convergente ?
2. a) Grâce au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\,dx$$

.

   b) En déduire que $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$.

2

1. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Soit λ un réel écrire sous forme factorisée $\det(\lambda I_3 - A)$.

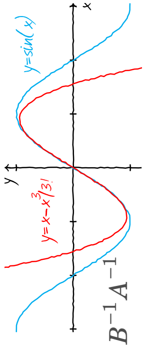
   (b) Déterminer les valeurs de λ telles que la matrice $\lambda I_3 - A$ ne soit pas inversible.

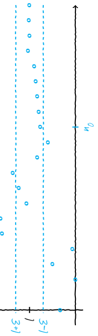
2. Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$

3

Déterminer le domaine de convergence de $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

On pourra discuter selon les valeurs de y.





Sujet B

1

1. Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}$, l'intégrale $J(b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^b)(1+u^2)}\, du$ est-elle convergente ?
2. a) Grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$, montrer que

$$I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^b}{(1+x^b)(1+x^2)}\, dx$$

.

b) En déduire que $I(b) = \dfrac{\pi}{4}$.

2

1. On considère la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

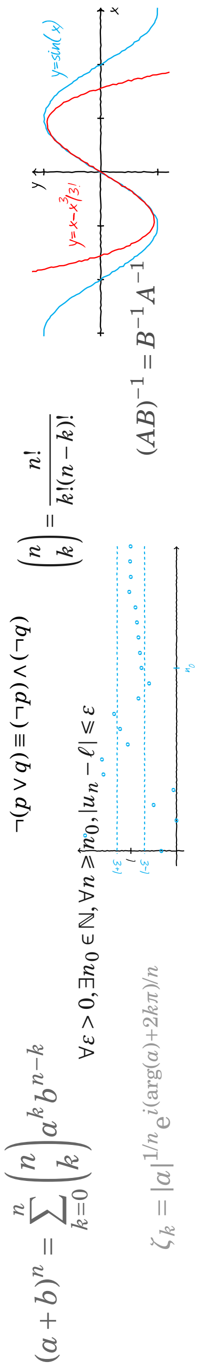
(a) Soit λ un réel écrire sous forme factorisée $\det(\lambda I_3 - B)$.

(b) Déterminer les valeurs de λ telles que la matrice $\lambda I_3 - B$ ne soit pas inversible.

2. Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

3

Déterminer le domaine de convergence de $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{1+x^{2n}}$. On pourra discuter selon les valeurs de x.



Sujet C

1

1. On considère la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -8 & 4\\ -1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

   (a) Soit λ un réel écrire sous forme factorisée $\det(\lambda I_3 - A)$.

   (b) Déterminer les valeurs de λ telles que la matrice $\lambda I_3 - A$ ne soit pas inversible.

2. Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\begin{vmatrix}1 & n & \cdots & n\\ n & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & n\\ n & \cdots & n & n\end{vmatrix}$

2

1. Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}$, l'intégrale $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,dt$ est-elle convergente ?

2. a) Grâce au changement de variable $t=\dfrac{1}{x}$, montrer que

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\,dx$$

.

   b) En déduire que $I(a)=\dfrac{\pi}{4}$.

3

Déterminer le domaine de convergence de $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

On pourra discuter selon les valeurs de y.

Sujet D

1

Déterminer le domaine de convergence de $f(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{1+x^{2n}}$. On pourra discuter selon les valeurs de x.

2

1. Pour quelles valeurs de $b\in\mathbb{R}$, l'intégrale $J(b)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u^b)(1+u^2)}\,du$ est-elle convergente ?
2. a) Grâce au changement de variable $u=\frac{1}{x}$, montrer que

$$I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{x^b}{(1+x^b)(1+x^2)}\,dx$$

.

b) En déduire que $I(b)=\frac{\pi}{4}$.

3

1. On considère la matrice :

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3\\ -1 & 5 & -7\\ -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

(a) Soit λ un réel écrire sous forme factorisée $\det(\lambda I_3-B)$.

(b) Déterminer les valeurs de λ telles que la matrice λI_3-B ne soit pas inversible.

2. Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$

1

1. Séparons deux cas : $a \geqslant 0$ et $a < 0$.
   - Si $a \geqslant 0$

     (i) La fonction $f : t \rightarrow \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2+a}}$.

     (iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^{2+a}}\, dt$ est convergente car $2+a > 1$. Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a \geqslant 0$.

   - Si $a < 0$

     (i) La fonction $f : t \rightarrow \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$.

     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et au voisinage de 0, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$.

     (iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\, dt$ est convergente car $2 > 1$ et $\int_0^c \dfrac{1}{t^a}\, dt$ est convergente car $a < 0 < 1$.
     Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et $\int_0^c f(t)\, dt$ est convergente.

     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a < 0$.

   Finalement $I(a)$ est convergente pour tout réel a.

2. a) On souhaite poser $t = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{t}$

   On aura donc $dt = -\dfrac{1}{x^2} dx$ et x varie de $+\infty$ à 0.

   Ainsi :

   $$I(a) = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx$$

   b) Additionnons les deux intégrales :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a+1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, d$$
   $$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
   $$= [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

   Ainsi $2I(a) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$.

2 On montre que A est diagonalisable. Avec les notations du cours, une solution est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

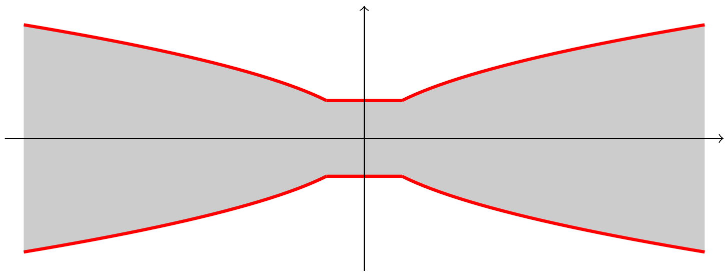
$$\begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \underset{=}{C_i \leftarrow C_i - C_n} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

3 On pose $u_n = \dfrac{x^n}{1+y^n}$. On cherche un équivalent de u_n en $+\infty$.

1° cas - $|y| > 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{y^{2n}} = \left(\dfrac{x}{y^2}\right)^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < y^2$.

2° cas - $|y| = 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{2}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. On retrouve la condition précédente.

3° cas - $|y| < 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{1} = x^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.



1

1. Séparons deux cas : $a \geqslant 0$ et $a < 0$.
   - Si $a \geqslant 0$
     (i) La fonction $f : t \to \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2+a}}$.
     (iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^{2+a}}\, dt$ est convergente car $2 + a > 1$. Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.
     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a \geqslant 0$.
   - Si $a < 0$
     (i) La fonction $f : t \to \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$.
     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et au voisinage de 0, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$.
     (iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\, dt$ est convergente car $2 > 1$ et $\int_0^c \dfrac{1}{t^a}\, dt$ est convergente car $a < 0 < 1$.
     Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et $\int_0^c f(t)\, dt$ est convergente.
     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a < 0$.

   Finalement $I(a)$ est convergente pour tout réel a.

2. a) On souhaite poser $t = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{t}$

   On aura donc $dt = -\dfrac{1}{x^2} dx$ et x varie de $+\infty$ à 0.

   Ainsi :

$$I(a) = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx$$

   b) Additionnons les deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a+1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, d$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

   Ainsi $2I(a) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$.

2 On montre que A est diagonalisable. Avec les notations du cours, une solution est :

$$P=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

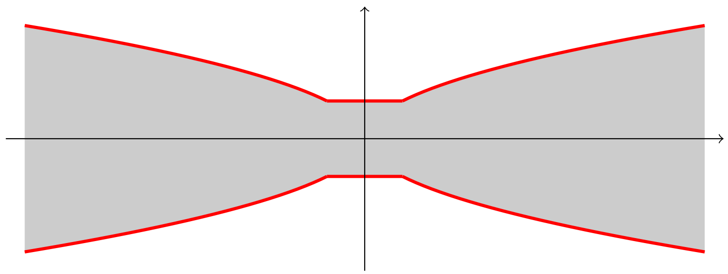
$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\ddots&0\\1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}\overset{C_1\leftarrow C_1-\sum_{j=2}^n C_j}{=}\begin{vmatrix}2-n&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=2-n.$$

3 On pose $u_n=\dfrac{x^n}{1+y^n}$. On cherche un équivalent de u_n en $+\infty$.

1° cas - $|y|>1$ **:** $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^n}{y^{2n}}=\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x|<y^2$.

2° cas - $|y|=1$ **:** $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^n}{2}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x|<1$. On retrouve la condition précédente.

3° cas - $|y|<1$ **:** $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^n}{1}=x^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x|<1$.



1 On montre que A est diagonalisable. Avec les notations du cours,

une solution est :

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&-1\\-1&-2&-2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-1&3&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}1&n&\cdots&n\\n&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&n\\n&\cdots&n&n\end{vmatrix}\overset{C_i\leftarrow C_i-C_n}{=}\begin{vmatrix}1-n&0&\cdots&n\\0&2-n&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&n\\0&\cdots&0&n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!.$$

2

1. Séparons deux cas : $a\geqslant 0$ et $a<0$.
   - Si $a\geqslant 0$
     (i) La fonction $f:t\to\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{2+a}}$.
     (iii) Or on sait que pour tout $c>0$, $\int_c^{+\infty}\dfrac{1}{t^{2+a}}\,dt$ est convergente car $2+a>1$. Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty}f(t)\,dt$ est convergente.
     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,dt$ est convergente lorsque $a\geqslant 0$.
   - Si $a<0$
     (i) La fonction $f:t\to\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$.
     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ et au voisinage de 0, $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^a}$.

(iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente car $2 > 1$ et $\int_0^c \frac{1}{t^a}\, dt$ est convergente car $a < 0 < 1$.
Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et $\int_0^c f(t)\, dt$ est convergente.

(iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a < 0$.

Finalement $I(a)$ est convergente pour tout réel a.

2. a) On souhaite poser $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

On aura donc $dt = -\frac{1}{x^2} dx$ et x varie de $+\infty$ à 0.

Ainsi :

$$I(a) = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx$$

b) Additionnons les deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a+1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
$$= [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

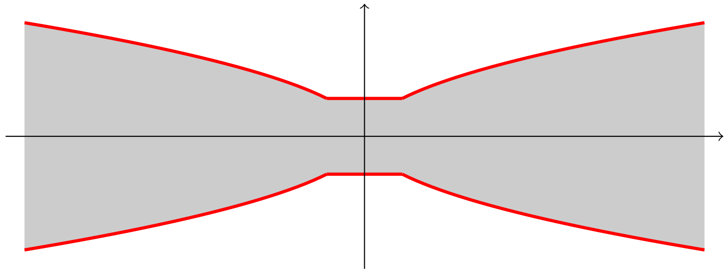
Ainsi $2I(a) = \frac{\pi}{2}$ et donc $I(a) = \frac{\pi}{4}$.

3 On pose $u_n = \frac{x^n}{1+y^n}$. On cherche un équivalent de u_n en $+\infty$.

1° cas - $|y| > 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{y^{2n}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < y^2$.

2° cas - $|y| = 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{2}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. On retrouve la condition précédente.

3° cas - $|y| < 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{1} = x^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

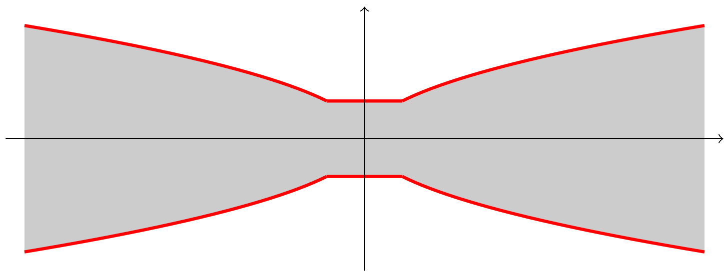


1 On pose $u_n = \frac{x^n}{1+y^n}$. On cherche un équivalent de u_n en $+\infty$.

1° cas - $|y| > 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{y^{2n}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < y^2$.

2° cas - $|y| = 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{2}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. On retrouve la condition précédente.

3° cas - $|y| < 1$: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{1} = x^n$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.



2

1. Séparons deux cas : $a \geqslant 0$ et $a < 0$.
   - Si $a \geqslant 0$

     (i) La fonction $f : t \to \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2+a}}$.

     (iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^{2+a}}\, dt$ est convergente car $2+a > 1$. Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a \geqslant 0$.

   - Si $a < 0$

     (i) La fonction $f : t \to \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$.

     (ii) Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et au voisinage de 0, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$.

     (iii) Or on sait que pour tout $c > 0$, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\, dt$ est convergente car $2 > 1$ et $\int_0^c \dfrac{1}{t^a}\, dt$ est convergente car $a < 0 < 1$.
     Donc d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et $\int_0^c f(t)\, dt$ est convergente.

     (iv) En conclusion, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\, dt$ est convergente lorsque $a < 0$.

   Finalement $I(a)$ est convergente pour tout réel a.

2. a) On souhaite poser $t = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{t}$

   On aura donc $dt = -\dfrac{1}{x^2}dx$ et x varie de $+\infty$ à 0.
   Ainsi :

$$I(a) = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx$$

   b) Additionnons les deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^a+1}{(x^2+1)(x^a+1)}\, d$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

   Ainsi $2I(a) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$.

3 On montre que A est diagonalisable. Avec les notations du cours, une solution est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{j=2}^{n} C_j} \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2 -$$

n.