Nom Prénom

☐A ☐B ☐C ☐D ☐E ☐F ☐G ☐H ☐I
☐J ☐K ☐L ☐M ☐N ☐O ☐P ☐Q ☐R
☐S ☐T ☐U ☐V ☐W ☐X ☐Y ☐Z

Pour la partie QCM, chaque question peut comporter une ou plusieurs bonnes réponses. Les réponses fausses seront comptées négativement.

---

1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^\alpha \,\mathrm{d}t$ converge si :

- ☐ $\alpha \geqslant 0$
- ☐ $\alpha < 2$
- ☐ $\alpha \leqslant 1$
- ☐ $\alpha > 1$
- ☐ $\alpha < 0$
- ☐ Aucune de ces réponses

2 Parmi ces affirmations, laquelle ou lesquelles sont exactes ?

- ☐ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \,\mathrm{d}t$ converge.
- ☐ La fonction ln est intégrable sur $[0,1]$.
- ☐ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t$ converge pour tout réel p.
- ☐ Aucune n'est vraie.

3 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérfiant : $x^2 f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

☐ Vrai ☐ Faux

4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Parmi ces affirmations, laquelle ou lesquelles sont exactes ?

- ☐ Échanger deux colonnes de A multiplie son déterminant par $(-1)^n$.
- ☐ Échanger deux lignes de A ne modifie pas son déterminant.
- ☐ Transposer A ne modifie pas son déterminant.
- ☐ Si deux lignes de A sont égales alors son déterminant est nul.
- ☐ Aucune n'est vraie.

Exercice 1. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & P(0) + XP(1) + X^2P(2). \end{array}$$

On admet que φ est un endomorphisme.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $\det(\varphi)$.
3. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? On prendra soin de rappeler le résultat de cours correspondant.

Exercice 2. On considère les intégrales généralisées définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que ces intégrales sont convergentes.
2. Calculer I_1.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre I_{n-1} et I_n. *Indication :* pour **terminer** le calcul, écrire $x^2 = x^2 + 1 - 1$.
4. En déduire l'expression de I_n en fonction de n (on ne demande pas de rédiger la récurrence mais uniquement de donner la formule).