



Applications linéaires

1 Pour s'entraîner

- 1** Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(\vec{e}_1) = -\vec{e}_3, \quad u(\vec{e}_2) = i\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad u(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$$

Déterminer $u \circ u$.

En déduire que u est un endomorphisme bijectif de E .

Calculer sa trace.

- 2** Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que l'égalité $AB - BA = I_n$ est impossible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- 3** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & -12 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Calculer la matrice de $f \circ f$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Que peut-on en déduire pour $f \circ f$?
- Que peut-on dire de f ? Que dire de la somme $\text{Ker } f + \text{Im } f$?

- 4** 1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base

canonique de \mathbb{R}^3 d'une projection vectorielle p dont on donnera les éléments caractéristiques.

2. Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base

canonique de \mathbb{R}^3 d'une symétrie vectorielle s dont on donnera les éléments caractéristiques.

- 5** Soit $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{w} = (1, -1, 0)$.

- Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Exprimer les vecteurs \vec{e}_2 et \vec{e}_3 comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{w}$.
- On désigne par s la symétrie vectorielle par rapport à la droite $F = \text{Vect}(\vec{e}_1)$ parallèlement au plan $G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$.
 - Donner la matrice D de s dans la base \mathcal{B} .
 - En utilisant 2., déterminer la matrice A de s dans la base canonique \mathcal{B}_0 .

2 Pour approfondir

- 6** Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_1(x) = e^{2x} \\ f_2(x) = x e^{2x} \\ f_3(x) = x^2 e^{2x} \end{cases}$$

On désigne par E le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par ces 3 fonctions.

- Déterminer une base \mathcal{B} de E . En déduire la dimension de E .
- Soit D l'application définie sur E par : $\forall f \in E, D(f) = f'$.
Démontrer que D est un automorphisme de E et donner sa matrice A dans la base \mathcal{B} .
- (a) On pose $N = A - 2I_3$. Calculer N^2 et N^3 .



- (b) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geq 1$.
4. Soit g l'application définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (4x^2 - 1)e^{2x}$.
Expliciter la dérivée n -ième de g .

7 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E .

- On suppose que $\text{Tr}(f) = \text{rg}(f) = 1$.
 - Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice A de f a ses $n-1$ premières colonnes égales à la colonne nulle.
 - En déduire que $f \circ f = \text{Tr}(f)f$
puis que f est un projecteur de E .
- On suppose à présent que f est un projecteur de E .
Démontrer que $\text{Tr}(f) = \text{rg}(f)$.

3 TP sous Maxima

8 On utilisera : diff, expand, matrix, rank, invert, transpose

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application g définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad g(P) = (2X + 1)P + (1 - X^2)P'$$

- Calculer $g(1)$, $g(X)$ et $g(X^2)$.
- Vérifier que g est un endomorphisme de E .
Cette question ne fera pas intervenir l'utilisation de commandes MAXIMA.
- Écrire la matrice A de g relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E .

- Donner le rang de g . g est-il un isomorphisme de E sur E ?
- (a) Donner la matrice de g^{-1} dans la base \mathcal{B} .
(b) On pose $P = a + bX + cX^2$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer, à l'aide d'un produit matriciel, le polynôme $g^{-1}(P)$.

4 Pour travailler seul

9

- Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1) \quad ; \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

- Calculer $f(x, y, z)$ pour tous réels x, y et z .
- Déterminer le noyau et l'image de f .

10 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f$ est l'application nulle sur \mathbb{R}^3 .

- Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
- On suppose de plus que $f \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
Peut-on avoir $\text{rg}(f) = 0$? $\text{rg}(f) = 3$? $\text{rg}(f) = 2$?
En déduire le rang de f par disjonction des cas.

11 Calculer le rang de chacune des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Intégration sur un intervalle

1 Pour s'entraîner

- 12** 1. Soient x et a des réels strictement positifs.
Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_1^x e^{-t} dt \quad ; \quad \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+ae^{-t}} dt \quad ; \quad \int_0^x \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt$$

Pour la dernière intégrale, on pourra remarquer que

$$1 = (t+2) - (t+1)$$

2. En déduire la convergence et la valeur de chacune des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{a+e^t} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt$$

- 13** 1. Soit x un réel tel que $x \geq 2$. Calculer par changement de variable, l'intégrale

$$\int_2^x \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt. \quad \text{On pourra poser } u = \frac{1}{t}.$$

2. En déduire la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt, \text{ et préciser sa valeur.}$$

- 14** Justifier l'existence et calculer l'intégrale généralisée :

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$$

- 15** Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.

1. Calculer pour tout réel $x \geq 1$,
$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

2. En déduire la convergence et la valeur de
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

- 16** Étudier la nature des intégrales généralisées et calculer ces intégrales lorsqu'elles sont convergentes

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \quad (d) \int_0^1 \frac{e^t}{1-e^t} dt$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \quad (e) \int_0^1 \ln t dt$$

$$(c) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad (f) \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$$

- 17** 1. Soit x un réel tel que $x \geq 1$. Calculer par une intégration par parties, l'intégrale $\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$.
2. En déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$, et sa valeur.

- 18** Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4} dx \quad (f) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{u e^{\cos u}} du \quad (g) \int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

$$(c) \int_0^1 \frac{e^x-1}{x\sqrt{x}} dx \quad (h) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$$

$$(d) \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx \quad (i) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} dx$$

$$(e) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt \quad (j) \star \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

- 19** 1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
3. (a) Montrer par une méthode analogue à la précédente, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.
- (b) ★ Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est divergente.
En déduire la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

- 20** 1. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{n+1}}$ est convergente. On pose alors $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{n+1}}$
2. Après avoir mis sous forme canonique $1+t+t^2$, calculer à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale I_1 .
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. On se fixe un entier naturel n non nul.
- (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{n+1}}$ est convergente.
On note alors K_n sa valeur.
- (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple que

$$K_n = \int_1^{+\infty} \frac{t^{n-1} dt}{t^n(1+t^n)} = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

- (c) Vérifier que pour tout réel $u > 0$, $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$
En déduire la valeur de K_n .
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n}$.
En déduire la convergence et la limite de la suite (I_n) .

- 21** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , l'intégrale I_n est-elle convergente ? Calculer I_2
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$
- (b) En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ dans l'intégrale $\int_a^b \frac{x}{1+x^3} dx$, démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx = I_3$
- (c) Vérifier que pour tout réel positif x ,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{x}{1+x^3}$$

- (d) Après avoir mis sous forme canonique $1-x+x^2$, calculer à l'aide du changement de variable $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x+x^2} dx$.
- (e) En déduire la valeur de I_3
3. Par le théorème de convergence dominée, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

- 22** Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f(1)$. Calculer $f(1/2)$ par changement de variable.
3. Quel est le sens de variation de f ?
4. Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$. Calculer $f(2)$ et $f(3/2)$.



23 Deux changements de variable. Soit $x > 0$, x fixé.

1. Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$

2. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$

(a) ★ Montrer par un changement de variable que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du. \quad \text{En déduire } f(1).$$

(b) En déduire, par le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x}$$

24 Pour tout réel x appartenant à $]0, 1[$, on pose : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$

1. (a) Calculer pour tout réel $x \in]0, 1[$ l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$

(b) Justifier que F est bien définie et que

$$\forall x \in]0, 1[, x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$$

(c) En déduire que F admet une limite finie à gauche en 1.

(d) Calculer $F'(x)$.

2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

(b) Montrer que F est une primitive sur $]0, 1[$ de la fonction

$$f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}.$$

(c) En déduire la valeur de I .

25 Soit la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de F . Calculer $F(0)$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) \leq \frac{1}{x}$.
En déduire la limite de F en $+\infty$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction F .

26 Théorème de convergence dominée .

Dans chacun des cas suivants, prouver la convergence de la suite (I_n) et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$:

(a) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \sin(t/n)}{1+t^2} dt$

(b) $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^{n+2}} dt$

(c) $I_n = \int_0^1 \frac{n(x+x^2)}{1+nx} dx$

(d) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{1+x^2} dx$

(e) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^n)}{1+x^2} dx$

(f) ★ $I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-t^n) dt$

(g) ★ $I_n = \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^n}\right) dx$

(h) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t(1+t^2)} \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) dt$

en justifiant d'abord que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$

27 1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \arctan(nt) dt$.

2. En déduire un équivalent simple lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{n}} \arctan x dx$$



28 Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = \int_0^1 f(nt) dt$
2. En déduire la convergence et la limite de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

2 Pour approfondir

29 1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ est convergente.

On définit la fonction F sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

2. (a) Soit $x > 0$. Montrer que $F(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.
(b) En déduire la limite de F en 0^+ .
3. (a) Soit $x > 0$. Montrer que $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$
(b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. On se fixe un réel $x > 0$.
(a) Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Effectuer le changement de variable $u = x+t$ dans l'intégrale $\int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt$
(b) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de e^x et de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$
5. Démontrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

30 Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.
2. Montrer que l'intégrale généralisée $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ converge.
3. Prouver, par changements de variable, que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos t}{t} dt$$

4. (a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ se prolonge par continuité en zéro.
(b) \star En introduisant une primitive G de g sur \mathbb{R} , déterminer la valeur de $I(a, b)$.

31 La fonction Gamma d'Euler .

Sous réserve d'existence, on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

1. Soit x un réel.
(a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
(b) Montrer que $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge ssi $x > 0$.
En déduire l'ensemble de définition I de Γ .
2. (a) On se fixe un réel $x > 0$. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\star)$$

(b) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. On admet que la fonction Γ est continue sur I . En utilisant l'égalité (\star) , proposer un équivalent simple de Γ en 0^+ .



3 TP sous Maxima

32 On utilisera : integrate, float, diff, assume, limit, ode2, ic1.

$$\text{Soit } f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt} dt$$

- Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt$ est convergente.
- Préciser l'ensemble de définition I de f . Donner la valeur exacte de $f(1)$ et une valeur approchée à 10^{-4} près.
- On admet que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I . Calculer $f'(x)$ sous la forme d'une intégrale.
- On se fixe un réel x appartenant à I .

(a) Proposer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \ln(t)$.

(b) Donner $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) - t$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln t e^{-xt}$.

(c) ★ En effectuant une intégration par parties sur $\int_{\varepsilon}^A \ln(t)e^{-xt} dt$,

$$\text{montrer que } f(x) = -x f'(x) - \frac{1}{x}$$

- Déduire de la question précédente que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Expliciter $f(x)$ pour $x \in I$.

4 Pour travailler seul

33 1. Soit α un réel strictement positif.

Pour quelles valeurs de α , l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)} dt$ est-elle convergente ?

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)} dt$$

(a) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}$$

(b) Calculer u_1 en remarquant que pour tout réel $t \geq 1$,

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

(c) En déduire u_2 et u_3 .

3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) établir que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

(c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

34

1. Justifier, pour tout réel $x > 0$, la convergence de l'intégrale

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

2. Soit $x > 0$.

(a) Montrer, par une intégration par parties, que

$$\frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq J(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$$

(b) En déduire un équivalent simple de $J(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. (a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $J(x) = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + J(1)$

(b) Prouver que J est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et calculer $J'(x)$.

(c) En déduire les variations de J sur \mathbb{R}^{+*} .

Préciser la limite de J en zéro.



Déterminants

1 Pour s'entraîner

35 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3i & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & i & 0 \\ 5 & 15 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ \sqrt{7} & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

36 Donner, sans calcul, la valeur de chaque déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix} ; \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

37 *En géométrie plane* .

Le plan usuel orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan.
 - Rappeler la formule d'addition $\sin(b-a)$ pour a et b réels.
 - En notant \mathcal{B} la base (\vec{i}, \vec{j}) , démontrer que

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

- Étant donnés trois points non alignés A, B et C , montrer que le triangle ABC a pour aire $\frac{1}{2} |\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$

- On prend comme points $A(-1, 2)$; $B(1, -2)$ et $C(2, 3)$. Calculer l'aire du triangle ABC .

38 Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b \\ \sin a & \sin b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & a+c & a^2+c^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

39 Calculer le déterminant de chacune des cinq matrices suivantes, en déduire celles qui sont inversibles et le cas échéant déterminer leur inverse par la méthode de la comatrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

40 Soit j une solution complexe de l'équation $1+z+z^2=0$.

$$\text{Calculer } \begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$$



41 Soient a, b et c trois complexes. On pose $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

- Calculer le déterminant Δ en fonction de a, b et c .
- On suppose dorénavant que a, b et c sont les racines du polynôme $P(X) = X^3 - X + 1$.
 - Donner la forme factorisée du polynôme $P(X)$ en fonction de a, b et c .
 - En déduire la valeur de Δ .

42 En ajoutant toutes les colonnes à la première, calculer sous **forme factorisée** le déterminant suivant :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

43 Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m - 1 & 3m - 1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$.

À quelle condition, cette matrice A est-elle inversible ?

44 1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

45 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^t A = -A$.
 A est-elle inversible ? Justifier.

46 Pour tout réel m , on considère la famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 :
 $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ définie par

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = (m, m, 1) \\ \vec{u}_2 = (2m, 4, m) \\ \vec{u}_3 = (m, 1, 0) \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m la famille \mathcal{F} est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

47 On se place dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Vérifier que les trois points A, B, C de coordonnées respectives $(2, 0, 1); (3, 1, 1); (1, -2, 0)$ ne sont pas alignés.

Trouver une équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par les trois points A, B et C .

48 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les points

- $A(1; 2; -1), B(1; 1; 0), C(2; -1; 1)$ et $D(m; 1; m+1)$ sont-ils coplanaires ?
- $A(1; 2; -1), B(m+1; 2; -2), C(m-2; m+2; m+4)$ et $D(2; 2; 0)$ sont-ils coplanaires ? Dans ce cas, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .



49 Soit $m \in \mathbb{R}^*$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/(m^2) \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible. En déduire $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

2. On pose $\begin{cases} \vec{u} = (1, 0, -m^2) \\ \vec{v} = (0, 1, -m) \\ \vec{w} = (1, m, m^2) \end{cases}$

- (a) Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{C} .
- (c) Que vaut $\det(f)$?

50 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
 $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = XP' + P$
 Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire le déterminant de φ .

2 Pour approfondir

51 Calculer le déterminant d'ordre n suivant (où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

52 Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

Soient a et b deux réels tels que $a \neq b$. On pose pour tout réel x ,

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & x & a+x & \ddots & \vdots \\ b+x & \ddots & \ddots & \ddots & a+x \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & b+x & x \end{vmatrix}$$

- 1. Démontrer que la fonction $x \mapsto D_n(x)$ est affine.
- 2. Calculer $D_n(x)$ pour tout réel x . En déduire $D_n(0)$.

53 Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Pour tout réel x , on considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

- 1. Calculer Δ_2 et Δ_3 .
- 2. En développant ce déterminant par rapport à sa première colonne, exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2} .
- 3. Montrer que la suite de terme général $u_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$ est géométrique et préciser sa raison.
- 4. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de x et de n .
- 5. Calculer la somme $\sum_{k=3}^n u_k$, en déduire l'expression de Δ_n .

54 Soit n un entier supérieur à 2.

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général :

$$a_{i,j} = \max\{i, j\}$$



55 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $d : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant. d est-elle bijective ?

56 1. Soit p un entier supérieur à 2. Calculer le déterminant d'ordre p suivant :

$$\delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Soit n un entier supérieur à 3. On considère la matrice $A = (|i - j|)_{1 \leq i < j \leq n}$
 - (a) Écrire A sous la forme d'un tableau de nombres.
 - (b) En effectuant des opérations élémentaires d'abord sur les colonnes, calculer $\det(A)$ en utilisant le résultat de 1.

3 TP sous Maxima

57 *Matrices de Vandermonde.* On utilisera : `length`, `addcol`, `transpose`, `for..from..thru..do`, `factor`, `determinant`

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle matrice de Vandermonde de la liste (a_1, a_2, \dots, a_n) la matrice carrée suivante :

$$V_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Écrire une fonction `vand(L)` qui renvoie la matrice de Vandermonde $V_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}$ avec comme argument une liste $L = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.
2. Calculer sous forme factorisée les déterminants des matrices de Vandermonde $V_{(a, b, c)}$ et $V_{(a, b, c, d)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $V_{(a, b, c, d)}$ soit inversible.
3. Conjecturer la forme factorisée du déterminant de Vandermonde : $\det(V_{(a_1, a_2, \dots, a_n)})$. Prouver cette conjecture.

4 Pour travailler seul

58 Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 6 & x \end{pmatrix}$. Déterminer les nombres réels x pour lesquels la matrice $M(x)$ est inversible.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & z-1 \\ 1 & z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Pour quelles valeurs de z la matrice M est-elle inversible ?
3. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que $N^3 = -I_3$. Que vaut $\det(N)$?
4. On pose $A = \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice A .

Séries

1 Pour s'entraîner

59 *Télescope* .

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de termes généraux suivants (pour $n \geq 2$) sont convergentes.

Le cas échéant calculer leur somme :

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}; \quad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad w_n = \frac{1}{n(n-1)}; \quad x_n = \frac{1}{n^2-1}$$

60 Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$\sum \frac{5}{3^n}; \quad \sum \frac{2^n}{n!}; \quad \sum \frac{3n}{5^n}; \quad \sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad \sum \frac{n^2+n+1}{n!}$$

61 Étudier la convergence et déterminer la somme de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum (n+1)e^{-n}$

(c) $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

(b) $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$

(d) $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ en remarquant que $n^2 = n(n-1) + n$

62 Soit $u_0 \in]0; 1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$, puis que la suite (u_n) converge vers 0.

2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

63 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On pose pour tout entier $n, v_n = \ln(u_n)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}$

4. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

64 Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$

7. $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+2+3+\dots+n}}$

2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

8. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$

3. $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$

9. $\star u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$

4. $u_n = \frac{\ln n}{n}$

5. $u_n = 2^{2n-1} e^{-n}$

6. $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{2^n}$

10. $u_n = \frac{n^2 \ln n}{e^n}$

65 1. Étudier rapidement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$

3. (a) Comparer $n!$ et n^n

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\ln(n!)}$



66 1. Soit x un réel supérieur à 2. Calculer l'intégrale $\int_2^x \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$

2. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$

3. Soient n et p deux entiers tels que $2 \leq n < p$.

Encadrer la somme $\sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k \ln^2(k)}$ par deux intégrales.

4. En déduire un équivalent simple du reste d'ordre n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

67 Discuter suivant α la nature de la série de terme général

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$$

68 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs.

1. Montrer que les séries $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum u_n^2$ convergent.

2. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

(b) En déduire la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$

69 1. Soient a et b deux réels positifs. Comparer $2\sqrt{ab}$ avec $a+b$

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente.

(a) Montrer que la série de terme général $v_n = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente.

(b) ★ La réciproque est-elle vraie ?

70 On pose pour tout entier $n \geq 2, u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n$.

2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

71 1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction exp.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ définie par

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}$$

72 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Déterminer la limite de $n u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

73 1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$

2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$

74 ★ Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{n}} ; v_n = \frac{n^{\ln n}}{n!} ; w_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$$

75 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$



- Proposer un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- En déduire la nature de la série de terme général u_n .

76 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^3}$

- ★ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \ln k \leq n \ln n$$

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln n}{n^2}$

- Déterminer la nature de la série $\sum u_n$

77 Déterminer la nature de chacune des séries :

$$(a) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)\cos n}{n^2\sqrt{n}}$$

$$(c) \sum_{n \geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) \quad (d) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

78 On se propose d'étudier la nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

- Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$
- Déterminer la suite positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(u_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- En déduire la nature de la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

79 1. Établir la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
Est-elle absolument convergente ?

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que pour tout réel t ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

- Déduire des deux questions précédentes la somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- Par une méthode analogue, calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$

2 Pour approfondir

80 Dans cet exercice, $\alpha > 0$.

- (a) ★ Soit la fonction $f : t \mapsto t^\alpha$.

Encadrer par deux intégrales la somme : $\sum_{k=1}^n f(k)$

(b) En déduire que $1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

- On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha}$

Étudier la nature de la série de terme général u_n .

**81** *Vers la formule de Stirling* .

On définit les suites (u_n) et (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n! \frac{e^n}{n^n} n^{-1/2} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
(b) Donner un équivalent simple de w_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. En déduire la nature de la série $\sum w_n$
4. Démontrer qu'il existe une constante réelle $\lambda > 0$ telle que

$$n! \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \lambda \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

5. APPLICATION : étudier la nature de la série de terme général

$$a_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$$

82 *Final 2020* .

1. (a) Déterminer $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{3/2} \left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\right)$
(b) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ est convergente.
2. On se fixe un réel x strictement positif.
Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est convergente.
3. Pour tout réel x strictement positif, on pose $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}$
Montrer que la fonction S est décroissante sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

4. On se fixe un réel $x > 0$. On admet que la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

- (a) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq S(x) \leq e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$
- (b) En déduire par un changement de variable, que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq S(x) \leq e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

5. On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.
6. (a) Prouver que pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} \leq S(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-x})^k$
(b) En déduire un équivalent simple de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

3 TP sous Maxima**83** *On utilisera : sum, simplify_sum, factor*

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

84 *On utilisera : sqrt, taylor, solve, sum*

Soit a, b et c trois nombres réels. On pose pour tout naturel n ,

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$



- Donner le développement asymptotique à trois termes de u_n au voisinage de $+\infty$.
- ★ En déduire les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ est convergente.
- Calculer alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4 Pour travailler seul

85 Les six questions sont indépendantes

- Combien vaut la somme suivante : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! 2^k}$?
- Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir la convergence de cette série ?

(a) $u_n \leq \frac{1}{n}$ (b) $u_n^2 \leq \frac{1}{n}$ (c) $\sqrt{u_n} \leq \frac{1}{n}$ (d) $e^{u_n} \leq \frac{1}{n}$

- Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

(a) $\sum \frac{1}{n^3}$ (b) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (c) $\sum \frac{1}{n^2+1}$ (d) $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$

- Pour laquelle des séries suivantes, la règle de D'Alembert permet-elle de justifier la convergence ?

(a) $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$ (b) $\sum \frac{n}{2^n}$ (c) $\sum \frac{\sin n}{n!}$ (d) $\sum \frac{1}{n^2}$

- Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général $\frac{\sinh(n)}{a^n}$ soit convergente.

- Parmi les 4 séries suivantes, une seule est divergente. Indiquer laquelle.

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ (b) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ (c) $\sum \frac{(-2)^n}{n!}$ (d) $\sum \frac{n+1}{2^n}$

86 On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge.

- Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \frac{1}{n^2}$ appartient à E .
- Montrer que, si u et v sont deux suites de E , alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ est absolument convergente.
- En déduire que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

87 Final 2013 . La série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est semi-convergente.

On appelle «reste d'ordre n » de la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$, le nombre réel

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir un équivalent de R_n , reste d'une série alternée convergente.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$2R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

- Justifier que, pour tout entier naturel n ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \right| \leq \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$

- Déterminer un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Diagonalisation

1 Pour s'entraîner

88 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants.

89 Soient n un entier supérieur à 2 et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + 2M = 3I_n$

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 + 2X - 3$
2. Que peut-on dire des valeurs propres réelles de la matrice M ?
3. Déterminer la seule matrice possible M .

90 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner le rang et le déterminant de J .
2. Exprimer J^2 en fonction de J .
3. En déduire les valeurs propres de J et la dimension de chaque sous-espace propre associé.

91 Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant pour valeurs propres 1 et 4. M est-elle diagonalisable ? Donner $\det(M)$. M est-elle inversible ? Quel est le rang de $M - I_2$?

92 Soient p et n deux entiers strictement positifs.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^p par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = 3A - 2I_n$.
 - (a) Quelles sont les éventuelles valeurs propres de A ?
 - (b) Calculer en fonction de A et p , les puissances A^p de A .

93 Montrer qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

94 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible, donner A^{-1} et A^{2021} .
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? Justifier que A est diagonalisable.
3. Diagonaliser A en donnant la matrice de passage P et son inverse P^{-1} .

95 On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de M .
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$D = P^{-1}MP$$

3. Calculer P^{-1} et expliciter M^n pour tout entier naturel n .

96 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Le cas échéant, les diagonaliser.



97 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Pour quels réels α la matrice A est-elle inversible ?
2. Donner les valeurs propres de A .
3. Pour quels réels α la matrice A est-elle diagonalisable ?

98 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application φ sur E par

$$\varphi(P) = (2X + 1)P + (1 - X^2)P'$$

1. Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
★ Que peut-on dire du degré des éventuels vecteurs propres de φ ?
2. On appelle f la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$.
(a) Écrire la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$.
(b) A est-elle diagonalisable ?
3. En déduire **les** vecteurs propres de φ .

99 Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A(k) = \begin{pmatrix} 3-k & k-5 & k \\ -k & k-2 & k \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A(k)$.
En déduire les valeurs propres de $A(k)$.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur k , la matrice $A(k)$ est-elle diagonalisable ?

100 On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = MP$.

1. Donner la matrice de Φ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire le rang de Φ , son image et son noyau.
3. Diagonaliser sans calcul, Φ .

101 On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A .
Justifier que A est diagonalisable.
(b) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter A^n en fonction de n .
2. On définit les suites (u_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = 0$, $w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -9u_n - 12w_n \\ w_{n+1} = 8u_n + 11w_n \end{cases} \quad \text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

(a) Reconnaître pour tout entier naturel n , le produit $A X_n$
(b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A , X_0 et de n .
(c) Déterminer u_n et w_n en fonction de n .

102 1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Diagonaliser la matrice A et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Exprimer X_n en fonction de X_0 , A et n .

En déduire la formule explicite de u_n en fonction de n , u_0 , u_1 et u_2 .



103 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Chercher deux vecteurs propres de φ linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs en une base de \mathbb{R}^3 .
3. Écrire la matrice de φ dans cette base.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

104 Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur \mathbb{N} par leurs premiers termes : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Reconnaître, pour tout entier naturel n le produit AX_n .
(b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A , X_0 et de l'entier naturel n .

2. (a) Démontrer que A admet une seule valeur propre.
(b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A , c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .

- (a) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de \mathbb{R}^3 telle que la matrice T de f dans cette base vérifie

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.

On notera dorénavant \mathcal{B}' la base (e'_1, e'_2, e'_3) .

- (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :

$$T = 2I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n .

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

- (a) Exprimer A en fonction de T , P et P^{-1} , puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n .
- (b) Calculer P^{-1} .
- (c) Calculer la première colonne de la matrice A^n . En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction du naturel n .

105 Déterminer le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$$



106 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On considère le déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Calculer Δ_2 et Δ_3 .
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\Delta_{n+2} = -2\Delta_{n+1} - \Delta_n$$

- En déduire la formule explicite de Δ_n en fonction de n .

2 Pour approfondir

107 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels

a et b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

108 Donner une CNS portant sur les réels a , b et c pour que la matrice

$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

109 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Justifier rapidement que A est diagonalisable.
(b) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P et la matrice diagonale D semblable à A .
- Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.
(a) On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $DN = ND$.
(b) En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, justifier que N est diagonale.
- À l'aide du logiciel MAXIMA, donner toutes les matrices $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$

110 On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

- Déterminer les valeurs propres de A .
- Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$?

111 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$$

- Pour tout entier $k \in [0, n]$, calculer $f(X^k)$.
- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Dans cette question seulement, on suppose $n = 3$.
(a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
(b) Montrer que f est un projecteur.
Préciser son noyau et son image.
- On suppose $n \geq 3$. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(X, 1 + X^2)$.



5. Quelles sont les valeurs propres de f ?
 ★ L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

112 Matrices diagonalisables de rang égal à 1.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne

non nulle de A .

- ★ En remarquant que les colonnes de A sont colinéaires à C , démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telle que $A = CL$.
- Vérifier que $LC = \text{Tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \text{Tr}(A)A$ où $\text{Tr}(A)$ désigne la trace de A .
- En déduire un polynôme annulateur de A ainsi que les éventuelles valeurs propres de A .
- Le nombre 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension du sous-espace propre associé ?
- Vérifier que $\text{Tr}(A)$ est valeur propre de A .
- En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Tr}(A) \neq 0$.

7. Application : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?
 Donner des vecteurs propres associés.

3 TP sous Maxima

113 Soient a, b et c trois nombres réels. On pose $A = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Déterminer le rang de A .
- Justifier que A est diagonalisable.
- Calculer les valeurs propres de A .

114 Maxima peut calculer la puissance d'une matrice carrée lorsque l'exposant est connu (par exemple A^2 ou A^5 où A est une matrice carrée donnée). Mais le logiciel ne sait pas donner directement l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel pour un entier naturel n quelconque. Pour aider Maxima à le faire dans le cas d'une matrice diagonalisable A , on suit les étapes suivantes :

- On diagonalise A en donnant la matrice de passage P de la base canonique vers une base de vecteurs propres de A , et la matrice diagonale correspondante D telles que $A = PDP^{-1}$.
- On donne directement D^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
- On obtient A^n à l'aide la formule $A^n = PD^nP^{-1}$.

On utilisera : charpoly, eigenvectors, transpose, ratsimp

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$

- Calculer le polynôme caractéristique de A .
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la matrice A soit diagonalisable.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque A est diagonalisable, écrire A^n sous la forme d'un tableau matriciel à 9 coefficients.
 On pourra introduire $s = a + b + c$.



4 Pour travailler seul

115 Final 2019 .

Soit k un nombre réel fixé tel que $k \neq -1$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A . Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A .
3. Donner une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

116 Final 2018 .

Soient a, b, c trois réels **tous non nuls**. On considère la matrice M carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et donner le nombre réel k tel que $M^2 = kM$.
(b) En déduire un polynôme annulateur de M .
Quelles sont les éventuelles valeurs propres de M ?
2. Déterminer le rang de M . En déduire une valeur propre de M .
3. On admet que M a deux valeurs propres distinctes.
(a) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de M .
(b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner P^{-1}
- (b) Diagonaliser la matrice M en l'exprimant en fonction de P, D et Q .

117 Final 2021.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle «trace de M », notée $\text{Tr}(M)$, le nombre réel défini par :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} \quad (\text{somme des coefficients diagonaux de } M)$$

On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $T(M) = \text{Tr}(M)$.
Montrer que le rang de T est égal à 1. En déduire la dimension de $\text{Ker}(T)$.
3. On suppose *dans cette question uniquement*, que $n = 2$.
On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice A de f relativement à la base \mathcal{B} .

Calculer le déterminant de f .

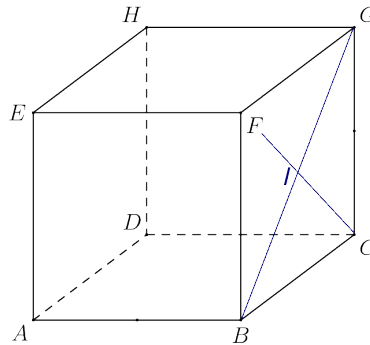
4. On revient au cas général où n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.
(a) Calculer $f(I_n)$. En déduire une valeur propre de f .
(b) Prouver que 1 est valeur propre de f et donner la dimension du sous-espace propre $E_1(f)$ associé en utilisant le résultat de la question 1.(b)
5. ★ Déduire des questions 4.(a) et 4.(b) que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Produit scalaire

1 Pour s'entraîner

118

1. Le plan géométrique euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 On pose $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$.
 Calculer la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) .
2. Dans l'espace géométrique usuel 3D, on se donne un carré $ABCDEFGH$. On désigne par I le point d'intersection des droites (BG) et (FC) .



Calculer une valeur approchée en degrés de l'angle géométrique \widehat{AIE} .

- 119 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit l'application $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
 Calculer $\|1\|$, $\varphi(1, X)$ et $\|X\|$.

- 120 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

- Calculer le déterminant de A en fonction de S et de σ .
- On suppose dans cette question, que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
 - Vérifier que $\det(A)^2 = (1 + 2\sigma)(1 - \sigma)^2$
 - Montrer, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $|\sigma| \leq 1$
 - En déduire que $|\det(A)| \leq 1$
- Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^t M M = I_n$.
 Montrer que A est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $S \in \{-1; 1\}$.

- 121 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$. Étudier le cas d'égalité.
- On suppose ici que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k > 0$ et $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.
 Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n^2$. Préciser les cas d'égalité.
- Montrer que $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}$

- 122 *Somme des coefficients d'une matrice orthogonale* .

Par définition, une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^t A A = I_n$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice orthogonale.

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour toutes matrices colonnes X et Y ,

$$\langle X | Y \rangle = {}^t X Y$$



1. Calculer $\langle AU | U \rangle$.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i, j} \right| \leq n$$

3. Étudier le cas d'égalité.

123 Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, on considère le plan vectoriel F d'équation $2x + y - z = 0$. On pose $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$.

Déterminer le projeté orthogonal du vecteur \vec{e}_1 sur le plan F .

124 Soit E un espace euclidien et \vec{n} un vecteur non nul de E . Soit $H = (\text{Vect}\{\vec{n}\})^\perp$ et p_H la projection orthogonale sur H .

1. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x | \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

2. Dans \mathbb{R}^3 , H est le plan d'équation $x - 2y + z = 0$. Donner la matrice de p_H dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Diagonaliser sans calcul cette matrice.

125 Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} (où $a < b$).

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. Calculer $\|g\|$ pour $g : t \mapsto 1$.

3. (a) Prouver que, pour $f \in E$, $\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt$
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ?

126 Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1, 0, 1) \quad ; \quad v = (1, 1, 1) \quad ; \quad w = (-1, 1, 0)$$

127 \mathbb{R}^4 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soit $e_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (1, -1, 1, -1)$. On pose $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur F .
3. Calculer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 0)$ au sous-espace F .

128 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ (i.e. $e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2, e_3 = X^3$). On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

Appliquer le procédé de Gram Schmidt pour construire une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$.

129 Avec un logiciel de calcul formel. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0, 1]$.

1. Vérifier que l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E .
2. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 : t \mapsto t$ et $u_2 : t \mapsto 1$. Construire une base orthonormale de F .
3. Calculer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^t - at - b)^2 dt$



130 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

On note \mathcal{P} et \mathcal{I} les sous-espaces vectoriels de E constitués respectivement des fonctions polynomiales paires et impaires.

- Démontrer que φ est un produit scalaire sur E .
- Prouver que si $g \in \mathcal{P}$ et si $h \in \mathcal{I}$ alors $\varphi(g, h) = 0$.
- À toute fonction f de E on associe la fonction

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{aligned}$$

- Vérifier que $\forall f \in E$, $\hat{f} \in \mathcal{P}$ et que $\forall f \in E$, $(f - \hat{f}) \in \mathcal{I}$
- En déduire que l'application $p : f \longmapsto \hat{f}$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de E à préciser.

2 Pour approfondir

131 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \longmapsto \langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^t A B)$ est un produit scalaire.

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A | A \rangle}$ la norme associée.

- Calculer $\langle I_n | A \rangle$ et montrer que pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(A) \leq \sqrt{n} \|A\|$$

- On pose $H = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.

- Vérifier que $H = \text{Vect}(I_n)^\perp$.

- On désigne par J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H .

132 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On se place dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $I = I_n$.

- (a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^t A B) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E .

- Pour $M \in E$, que vaut $\langle M | I \rangle$?

- On désigne par J la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. On pose $F = \text{Vect}(I, J)$.

- Calculer J^2 en fonction de J . En déduire $\langle J | J \rangle$.

- On note $P_F(M)$ le projeté orthogonal sur F d'une matrice $M \in E$.

En remarquant que $\langle M | J \rangle = \langle P_F(M) | J \rangle$, exprimer $p_F(M)$ comme combinaison linéaire de I et J en fonction de $\text{tr}(M)$ et du réel $\mu = \langle M | J \rangle$.

- Calculer μ en fonction des coefficients de M .

133 *Final 2019* .

On note E l'ensemble des suites $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

- (a) Prouver que pour tous réels x et y , $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
- (b) En déduire que si $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites appartenant à E , alors la série $\sum u_n w_n$ est absolument convergente.

- On admet que E , muni des lois usuelles, est un \mathbb{R} -espace vectoriel. On considère l'application φ qui associe à tout couple $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in E^2$, le nombre réel

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n$$



- (a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \cdot | \cdot \rangle$
- (b) Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à E .
Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{2^n}$ appartient à E .
En déduire la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{2^n}$.
- (c) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer le plus petit réel $A > 0$ tel que

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \right| \leq A \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$$

134 Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que f^2 est intégrable sur I , c'est-à-dire telles que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Prouver que pour tous réels a et b , $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une fonction intégrable sur I .
3. Soit φ l'application qui au couple $(f, g) \in E^2$ associe le réel :
 $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle | \rangle$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$$

Partie B : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t \mapsto e^{-t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{-2t}$

1. Justifier que f_1 et f_2 sont des éléments de E .
2. Construire une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ de E .
3. On admet que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} t e^{-kt} dt = \frac{1}{k^2}$
Calculer les deux réels a et b minimisant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (te^{-t} - ae^{-t} - be^{-2t})^2 dt$$

135 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

1. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est symétrique.
2. Démontrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

3 TP sous Maxima

136 On utilisera : integrate, length, sqrt, for..from..thru..do, sum, append, ratsimp

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

1. Créer une fonction ps(expr1, expr2) qui calcule l'intégrale

$$\int_0^1 \text{expr1} \times \text{expr2} dt$$

dans laquelle expr1 et expr2 sont deux expressions de la variable désignée t .



2. Soit $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions de E .

Écrire une procédure orthom(famille) prenant en paramètre une liste d'expressions $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ de la variable désignée t et qui renverra la famille orthonormale associée à \mathcal{F} obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt.

3. On note h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(t) = \begin{cases} t \ln t & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

(a) Justifier que $h \in E$.

(b) On pose $\delta = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 t^2 (\ln(t) - a - b t^3 - c \sqrt{t})^2 dt$

Déterminer le sous-espace vectoriel F de E tel que $\delta = d(h, F)^2$.

★ En déduire la valeur exacte de δ sans chercher à calculer les réels a, b et c réalisant le minimum.

4 Pour travailler seul

137 Final 2015 .

On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On désigne par F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$.

- Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F . Compléter cette base en une base orthonormale directe \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 .
- Soit p la projection orthogonale sur F .
 - Déterminer la matrice A de p dans la base canonique \mathcal{B}_0 .
 - Calculer la distance du vecteur e_1 au sous-espace F .

138 Final 2018 .

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application φ définie de $E \times E$ à valeurs dans \mathbb{R} par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

- Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .
- On notera dorénavant $\langle P | Q \rangle$ au lieu de $\varphi(P, Q)$. On désigne par $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On rappelle que F est de dimension 2. Vérifier que $(1, X)$ est une base orthonormale de F .
- Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel F .
 - En déduire la distance $d(X^2, F)$ du polynôme X^2 au sous-espace vectoriel F .
- Trouver un troisième polynôme Q_3 tel que $(1, X, Q_3)$ soit une base ortho-normée de E .

139 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E \times E$ l'application

$$\varphi : (P, Q) \longmapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

- Vérifier que (E, φ) est un espace euclidien.
- On pose $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$. Déterminer F^\perp .
- Par le procédé de Gram-Schmidt, obtenir une base ortho-normée de E .
- Déterminer G^\perp lorsque $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G .

140 1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la projection orthogonale sur le plan \mathcal{P} d'équation $x - y + 2z = 0$.

- Diagonaliser cette matrice A .



Équations différentielles linéaires

1 Pour s'entraîner

141 Résoudre :

$$1. \begin{cases} y' + 3y = e^{2t} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$2. y' + y = t^2$$

$$3. \sqrt{1-t^2} y' - y = 1 \text{ sur }]-1, 1[.$$

142 *Variation de la constante.*

Résoudre sur $]0, +\infty[$ chacune des équations différentielles suivantes :

$$(a) 2ty' + y = \frac{1}{1+t}$$

$$(b) ty' + y = \cos t$$

$$(c) ty' - y = t \ln t$$

$$(d) ty' - y = \frac{1}{1+t^2}$$

$$(e) t^2 y' + y = t^2$$

143 1. Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} puis sur \mathbb{R}^{-*} l'équation différentielle :

$$ty' + y = t^2 - 1$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t f'(t) + f(t) = t^2 - 1$$

144 On considère l'équation différentielle (E) : $ty' + 2y = \frac{t}{t^2 + 1}$

1. Déterminer la solution générale de (E) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.

2. (a) Calculer le développement limité d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction arctan.
 (b) Montrer qu'il existe une unique solution φ de (E), définie sur \mathbb{R} .

145 On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 y' + (t-1)y = 0$

1. Résoudre (E) sur $I_1 = \mathbb{R}^{+*}$ et sur $I_2 = \mathbb{R}^{-*}$.
 2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E) définies sur \mathbb{R} ?

146 *Premier ordre avec recollement.*

Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$t^2 y' - y = (t^2 - 1)e^t$$

147 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur \mathbb{R} vérifiant

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x f(t) dt = \cos x$$

$$(b) \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x t f(t) dt = 1$$

148 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

1. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \varphi(x) + \int_0^x t f(t) dt$$

2. Calculer $f(x)$ lorsque $\varphi : x \mapsto x^2$.



149 Soit $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ . Démontrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = a(t)y$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

150 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -ty \\ y' = tx \end{cases}$ en posant $z = x + iy$.

151 En posant $z = x + iy$, résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} (t^2 + 1)x' = tx + y - 2t \\ (t^2 + 1)y' = -x + ty + 2 \end{cases}$$

152 Résoudre sur \mathbb{R} les systèmes différentiels suivants (où les fonctions inconnues x et y sont à valeurs réelles) :

$$(a) \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \\ x(0) = 1, y(0) = -5 \end{cases}$$

153 1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Résoudre le système différentiel suivant où x, y, z désignent les fonctions inconnues à valeurs réelles :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

154 Résoudre chacun des systèmes différentiels

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases} ; \begin{cases} x' = x + 2y + 2z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x + y + 4z \end{cases} \text{ avec les conditions } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 3 \end{cases}$$

155 On considère le système différentiel linéaire

$$(S) : \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions inconnues de la variable réelle t , à valeurs dans \mathbb{R} .

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter la matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$(S) \iff X' = AX$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .

A est-elle diagonalisable ?

Déterminer une matrice triangulaire supérieure T semblable à A .

3. Résoudre le système (S).

156 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + y + 2t \\ y' = -x + 3y + 1 \end{cases}$$

On pourra poser $z = x - y$ et déterminer une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 dont z est solution.



157 Pour tout réel t , on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$

- Déterminer les éléments propres de la matrice $A(t)$.
En déduire que $A(t)$ est diagonalisable.
On explicitera la matrice de passage $P \in GL_2(\mathbb{R})$.
- Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= (1-3t)\mathbf{x} + 4t\mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= -2t\mathbf{x} + (1+3t)\mathbf{y} \end{cases}$$

158 On considère le système différentiel :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x'(t) &= 2tx(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2ty(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + 2tz(t) \end{cases}$$

- Écrire le système (Σ) sous forme matricielle : $X'(t) = A(t)X(t)$.
- Déterminer une matrice inversible P (qui ne dépend pas de t) et une matrice diagonale $D(t)$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = PD(t)P^{-1}$.
- On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Vérifier que $(\Sigma) \iff Y'(t) = D(t)Y(t)$.
- En déduire les solutions du système (Σ) .

159 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $y'' - 5y' + 6y = 1 + t^2$ | 4. $y'' + y' - 2y = e^{2t}$ |
| 2. $y'' + 2y' + y = e^t$ | 5. $y'' + y' - 2y = e^{-2t}$ |
| 3. $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ | 6. $y'' + y' + y = t^2 + e^t$ |

160 *Équation d'Euler par changement de variable.*

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

On considère sur \mathbb{R}^{+*} l'équation différentielle (E) :

$$at^2 y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0$$

- On pose pour tout réel $x, z(x) = y(e^x)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, y(t) = z(\ln t)$.
Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, que l'on précisera.
- Applications.* Résoudre chacune des équations différentielles suivantes sur \mathbb{R}^{+*} :

$$(a) t^2 y''(t) = 6y(t) \quad (b) t^2 y''(t) - 3ty'(t) + 5y(t) = 0$$

161 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

2 Pour approfondir

162 *Solution périodique.* Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π -périodique. On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) : y' + ay = b(t)$$

- Prouver que si f est une solution de (E) alors la fonction $g : t \mapsto f(t + 2\pi)$ l'est aussi.
- En déduire qu'une solution f de (E) est 2π -périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$.
- (a) Montrer que si f est solution de (E), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(\lambda + \int_0^t b(u)e^{au} du \right) e^{-at}$$

- (b) Déduire des questions 2. et 3.(a), que (E) admet une unique solution 2π -périodique.

**163** *Méthode de Lagrange.*

On considère l'équation différentielle linéaire homogène (H) :

$$(1 + t^2)y'' - 2y = 0$$

1. Proposer une solution «évidente» f de (H), polynomiale de degré 2.
2. On cherche une autre solution g de (H), linéairement indépendante de f , sous la forme $g : t \mapsto C(t)f(t)$.
Montrer que g est solution de (H) si, et seulement si, la dérivée C' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, que l'on précisera.
3. Résoudre (H).
4. Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1 + t^2)y'' - 2y = t$

164 *Avec une équation d'Euler.*

1. Résoudre dans \mathbb{R}^{+*} l'équation différentielle $t^2 y''(t) + y(t) = 0$ (*) en effectuant le changement de fonction inconnue : $z(x) = y(e^x)$.
2. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $\forall t > 0, f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Montrer que f est solution de (*).
3. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall t > 0, f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

165 *Encore une équation d'Euler.*

On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .
2. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+ et sur \mathbb{R}_- .
3. ★ Démontrer que l'espace vectoriel des solutions de (E) sur \mathbb{R} est de dimension 3. On pourra en proposer une base.

166 *Par analyse/synthèse.*

Trouver toutes les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x)$$

167 *Par analyse/synthèse.*

1. On définit les fonctions \sinh et \cosh sur \mathbb{R} par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Calculer les dérivées premières et secondes de ces deux fonctions.

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$$

168 On désigne par E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} . On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array} \quad \text{où } \forall t \in \mathbb{R}, \Phi(f)(t) = f'(t) + t f(t)$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
2. Montrer que tout nombre réel k est valeur propre de Φ et déterminer le sous-espace propre associé à k .
3. En déduire que si λ est un réel positif, alors λ est une valeur propre de $\Phi \circ \Phi$.
4. Soit $f \in E$. Calculer $[\Phi \circ \Phi(f)](t)$ pour tout nombre réel t .
5. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2ty' + (t^2 - 1)y = 0$



3 TP sous Maxima

169 On utilisera : diff, ode2, taylor, limit, plot2d

On considère l'équation différentielle (E) :

$$t^2 y'' + 4t y' + 2t = \ln(1+t)$$

1. Faire résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ par MAXIMA.
2. Déterminer l'unique solution de (E) ayant une limite finie en zéro. On la notera f .
3. Faire tracer le graphe de f sur $[0, +\infty[$.

4 Pour travailler seul

170 Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t^2)y' + y = 2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t , définie et dérivable sur \mathbb{R} et y' sa fonction dérivée.

171

1. On définit la fonction g sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +\infty[$ par

$$g(x) = x \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$$

Justifier que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.

2. On considère l'équation différentielle $(E_1) : (1+x)y' = xy$ dans laquelle y désigne la fonction inconnue de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'intervalle I . On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle I , vérifiant $\varphi(0) = 1$.

(a) Justifier sans calcul, l'existence et l'unicité de φ .

(b) Calculer explicitement $\varphi(x)$ en remarquant que

$$\forall x \in I, \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

3. On considère à présent l'équation différentielle $(E_2) :$

$$x^2(1+x)y'' - x(x^2 + 2x + 2)y' + (x^2 + 2x + 2)y = 0$$

- (a) Trouver une fonction affine non nulle y_1 solution de cette équation (E_2) .
- (b) On peut obtenir une solution y_2 indépendante de y_1 en la recherchant sous la forme

$$y_2(x) = \lambda(x)y_1(x)$$

où $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue deux fois dérivable sur J . En déduire, à l'aide de la fonction g vue à la question 1., une expression de la solution générale de (E_2) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.