MTZ

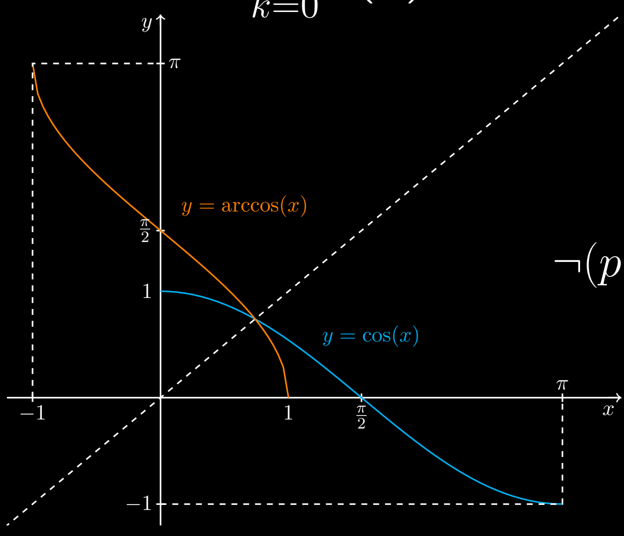
Algèbre et Analyse

Alexis Flesch

Automne 2019

Version étudiant-e

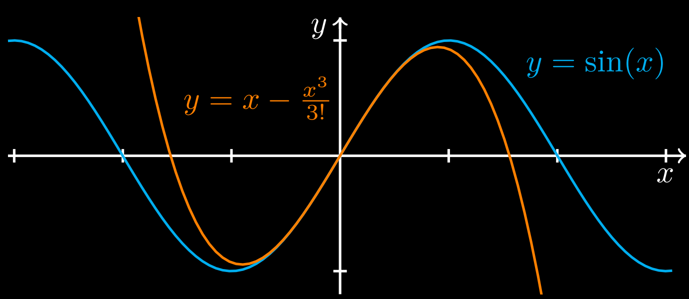
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



$$\zeta_k = |a|^{1/n} \mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$$

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Table des matières

Table des matières

Objectifs d’apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- traduire un énoncé à l’aide de quantificateurs,
- écrire la négation d’une assertion,
- distinguer les notions de condition nécessaire et condition suffisante,
- démontrer un résultat par disjonction de cas,
- démontrer un résultat par contraposée,
- démontrer un résultat par l’absurde,
- démontrer un résultat par analyse-synthèse,
- démontrer un résultat par récurrence.

I Symboles ensemblistes

I.1 Notions d’ensemble et d’élément

Définition 1.1. Un **ensemble** E est une collection d’objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 1.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 1.3. L’ensemble constitué des entiers 0 et 1 est noté $\{0; 1\}$.

Définition 1.4. Soient E et F deux ensembles. On dit qu’ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 1.5. Il n’y a pas nécessairement de relation d’ordre dans un ensemble. Il n’y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{0; 1\} = \{1; 0\}$.

Définition 1.6. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l’ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Remarque 1.7. L’ensemble $\{\varnothing\}$ n’est pas l’ensemble vide : c’est un ensemble constitué d’un seul élément, cet élément étant l’ensemble vide.

Définition 1.8. Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection** de E et de F l’ensemble $E \cap F$ dont les éléments sont les éléments communs à E et à F.
- On appelle **réunion** de E et de F l’ensemble $E \cup F$ dont les éléments sont les éléments de E et les éléments de F.

Exemple 1.9. Soient E et F les ensembles définis par $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ et $F = \{0; 2; 4; 6\}$. Alors :

- $E \cap F = \{0; 2; 4\}$,
- $E \cup F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple 1.10. Notons $\mathbb{R}^+$ l’ensemble des réels positifs. On peut remarquer que :

- $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$,
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 1.11. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Exemple 1.12. $\{1;2\} \subset \{1;2;3\}$.

Exemple 1.13. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I.3 Produit cartésien

Définition 1.14. Soient E et F deux ensembles. À partir de $x \in E$ et de $y \in F$, on forme le **couple** (x, y) défini de sorte que : $(x, y) = (x', y')$ uniquement lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Attention. Ici, l'ordre des éléments est important. Par exemple :

$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

Définition 1.15. On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F l'ensemble formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$:

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

Exemple 1.16. Si $E = \{1;2;3\}$ et que $F = \{a, b\}$ alors :

$$E \times F = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)\}.$$

Définition 1.17. Soient E_1, E_2, ..., E_n des ensembles (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

- À partir de $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., et $x_n \in E_n$, on forme le **n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ défini de sorte que : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ uniquement lorsque $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, ... et $x_n = x'_n$.
- On appelle **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2, ..., E_n l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in E_i$. On le note $E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\big\}.$$

- Lorsque $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, on note $E^n = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

I.4 Notion d'application entre deux ensembles

Définition 1.18. Une **application** (ou **fonction**) d'un ensemble E vers un ensemble F est une «transformation» qui à chaque élément x de E associe un et un seul élément y de F. Cet élément est noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f

Remarque 1.19. Une application est donc la donnée de 3 éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et les images des éléments de l'ensemble de départ. Les applications ci-dessous sont donc différentes :

$$f \begin{array}{rcl} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \qquad g \begin{array}{rcl} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \qquad h \begin{array}{rcl} : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

II Rudiments de logique

II.1 Assertions

Définition 1.20. Une **assertion** est un énoncé mathématique défini sans ambiguïté et pouvant être vrai (V) ou faux (F).

Exemples 1.21. Les énoncés suivants sont des assertions :
- $P_1 : 1 \leqslant 2$;
- $P_2 : 0 < 0$.
- P_3 : Le nombre 2^{13} est un entier positif.
- P_4 : Si x est un nombre réel négatif, alors sa valeur absolue est égale à x.

Exemple 1.22. La phrase «$f(x) = x^2$ est croissante» n'est pas une assertion car la fonction f est mal définie (suivant son espace de départ, cette phrase peut être vraie ou fausse).

Remarque 1.23. Il arrive qu'une assertion P dépende d'un paramètre x (ou de plusieurs paramètres $x, y, z, \ldots$), on la notera dans ce cas $P(x)$ (ou $P(x, y, z, \ldots)$) au lieu de P. On parle parfois de **prédicat**.

Exemples 1.24. Les énoncés suivants sont des prédicats :
- $P_1(x) : x \geqslant 0$;
- $P_2(a, b) : a + b = 0$.

Définition 1.25. Deux assertions P et Q ayant les mêmes valeurs de vérité sont dites **synonymes**. On note $P \equiv Q$ lorsque P et Q sont synonymes.

Exemple 1.26. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors les assertions suivantes sont synonymes :
- $P(n)$: « n est pair » ;
- $Q(n)$: « $n + 1$ est impair ».

II.2 Négation

Définition 1.27. La **négation** d'une assertion P est l'assertion prenant la valeur **Fausse** lorsque P est **Vraie** et inversement. On la note $\text{non}(P)$ (ou encore $\neg P$ ou $\overline{P}$).

Exemple 1.28. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P(x) : x \geqslant 2$, alors $\text{non}(P(x)) : x < 2$.

Remarque 1.29. On peut aussi dire que l'assertion $\text{non}(P)$ est définie à l'aide de la **table de vérité** suivante :

P	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

Proposition 1.30

Soit P une assertion, alors $\text{non}(\text{non}(P)) \equiv P$.

Démonstration. Écrivons la table de vérité correspondante.

P	$\text{non}(P)$	$\text{non}(\text{non}(P))$
V	F	V
F	V	F

□

II.3 Conjonction "et" et disjonction "ou"

Définition 1.31. Soient P et Q deux assertions. On appelle **conjonction** des assertions P et Q et on note $[P \text{ et } Q]$ (ou encore $P \wedge Q$) l'assertion qui est **Vraie** lorsque P et Q sont toutes les deux **Vraies** et **Fausse** sinon.

Remarque 1.32. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.33. Considérons les assertions :

- $P(x) : x \in \mathbb{Z}\,;$
- $Q(x) : x \geqslant 0\,;$
- $R(x) : x \in \mathbb{N}.$

Alors :

$$[P(x) \text{ et } Q(x)] \equiv R(x).$$

Définition 1.34. Soient P et Q deux assertions. On appelle **disjonction** de ces assertions et on note $[P \text{ ou } Q]$ (ou encore $P \vee Q$) l'assertion qui est **Fausse** lorsque P et Q sont toutes les deux **Fausses** et **Vraie** sinon.

Remarque 1.35. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 1.36. Le «ou» mathématique est **inclusif**. L'assertion $[P \text{ ou } Q]$ est vraie si l'une au moins des assertions P ou Q est vraie.

Exemple 1.37. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :

- $P(x) : x \geqslant -1\,;$
- $Q(x) : x \leqslant 0.$

Alors $\big[P(x) \text{ ou } Q(x)\big]$ est une assertion qui est vraie pour tout x.

Proposition 1.38 (Lois de Morgan)

Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$\begin{aligned} \text{non}(P \text{ ou } Q) &\equiv (\text{non}(P)) \text{ et } (\text{non}(Q)), \\ \text{non}(P \text{ et } Q) &\equiv (\text{non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q)). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous démontrerons le premier résultat en classe. Le deuxième est laissé à titre d'exercice. □

Proposition 1.39 (Distributivité)

Soient P, Q et R trois assertions. Alors :

$$P \text{ et } [Q \text{ ou } R] \equiv [P \text{ et } Q] \text{ ou } [P \text{ et } R].$$
$$P \text{ ou } [Q \text{ et } R] \equiv [P \text{ ou } Q] \text{ et } [P \text{ ou } R].$$

Démonstration. La première identité sera faite en classe, la deuxième est laissée à titre d'exercice. □

II.4 Implication

Définition 1.40. Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \implies Q$ comme étant :
- **Vraie** lorsque P est **Fausse** ou P et Q sont toutes les deux **Vraies**,
- **Fausse** sinon.

L'assertion $P \implies Q$ se lit «P **implique** Q». On parle aussi de l'**implication** $P \implies Q$. On dit que $Q \implies P$ est l'**implication réciproque** (ou tout simplement **la réciproque**) de $P \implies Q$.

Remarque 1.41. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposition 1.42

Soient P et Q deux assertions. Alors :
- $(P \implies Q) \equiv [\text{non}(P) \text{ ou } Q]$,
- $\text{non}(P \implies Q) \equiv [P \text{ et } \text{non}(Q)]$.

Exemple 1.43. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :
- $P(x) : x \geqslant 2$;
- $Q(x) : x^2 \geqslant 4$.

Alors, $P(x) \implies Q(x)$ est vraie. Cependant, la réciproque est fausse. En effet, pour $x = -2$:

$$x^2 \geqslant 4 \quad \text{et} \quad x < 2,$$

donc $[Q(x) \text{ et } \text{non}(P(x))]$ est vraie (i.e. $\text{non}\,(Q(x) \implies P(x))$ est vraie). En revanche, si on définit l'assertion $R(x) : x \leqslant -2$, alors les deux implications ci-dessous sont vraies :

$$[P(x) \text{ ou } R(x)] \implies Q(x) \quad \text{et} \quad Q(x) \implies [P(x) \text{ ou } R(x)]\,.$$

II.5 Équivalence

Définition 1.44. Soient P et Q deux assertions. On note $P \iff Q$ l'assertion

$$\big[(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\big],$$

et on lit «P et Q sont **équivalentes**».

1 En s'inspirant de la démonstration précédente, écrire la table de vérité de $P \iff Q$.

Exemple 1.45. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x^2 = 4 \iff x \in \{-2; 2\}.$$

II.6 Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Définition 1.46.
- On dit que Q est une **condition nécessaire pour** P lorsque l'implication $P \implies Q$ est vraie, autrement dit lorsque le fait que P soit vraie entraîne nécessairement le fait que Q soit vraie aussi. On dit aussi « Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie. »
- On dit que Q est une **condition suffisante pour** P lorsque l'implication $Q \implies P$ est vraie autrement dit lorsqu'il suffit que Q soit vraie pour que P le soit aussi.
- On dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante pour** P lorsque l'équivalence $Q \iff P$ est vraie autrement dit lorsque P est vraie si et seulement si Q est vraie. On dit aussi « Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie. »

2 Soit x un nombre réel. La propriété $x \geqslant 1$ est-elle une condition nécessaire pour la propriété $x^2 + x - 1 \geqslant 0$? Une condition suffisante ?

II.7 Quantificateurs

Définition 1.47. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\forall x \in E, \;\; P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsque $P(x)$ est **Vraie** pour tous les éléments x de E. On lit « **quel que soit** x **appartenant à** E, $P(x)$ ».

3 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 \geqslant 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \sin(x) \leqslant 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.48. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists x \in E, \;\; P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe (au moins) un élément x de E pour lequel $P(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$ ».

4 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\exists x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 \geqslant 0$;
- $\exists x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 = -1$;
- $\exists x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.49. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists! x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe exactement un élément x de E pour lequel $P(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe un unique x appartenant à E tel que** $P(x)$».

5 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists! x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$;
- $\exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = 1$.

Remarque 1.50. On peut construire des phrases mathématiques plus compliquées mélangeant les différents types de quantificateurs. Attention à ne pas les inverser ! Par exemple, l'assertion suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n.$$

Cependant, l'assertion suivante est fausse :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \leqslant n.$$

Proposition 1.51

$$\begin{aligned} \mathrm{non}(\forall x \in E,\ P(x)) &\equiv \exists x \in E,\ \mathrm{non}(P(x)), \\ \mathrm{non}(\exists x \in E,\ P(x)) &\equiv \forall x \in E,\ \mathrm{non}(P(x)). \end{aligned}$$

Exemple 1.52. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **positive** si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, f n'est pas positive ssi (si et seulement si) :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0.$$

6 Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **croissante** si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\big).$$

Écrire la négation de l'assertion précédente.

7 Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

Écrire la négation de cette assertion.

III Raisonnements

III.1 Raisonnement direct ou par implication(s)

Méthode (Démonstration directe par implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$). Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer qu'elle découle de résultats déjà connus. Autrement dit, on part d'une assertion $\mathscr{Q}$ vraie et on démontre que l'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est vraie (en effectuant éventuellement une chaîne d'implications). La démonstration dut fait que l'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est vraie commence en général par « Supposons que $\mathscr{Q}$ est vraie » et se termine par « Donc $\mathscr{P}$ est vraie. »

Définition 1.53. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $n! = n \times (n-1) \times \ldots 1$. On note encore $0! = 1$.

Définition 1.54. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ce nombre est appelé **coefficient binomial** et se lit «k parmi n». Par convention, ce coefficient est égal à zéro lorsque $k > n$.

Proposition 1.55

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Vue en cours. □

Exemple 1.56. Démontrons que : $0 \leqslant x \leqslant 2 \implies \sqrt{x^2+5} \leqslant 3$. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \implies 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \implies 0 \leqslant x^2 + 5 \leqslant 9 \implies 0 \leqslant \sqrt{x^2+5} \leqslant 3.$$

8 On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^\star \right\}$. Démontrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et que $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Méthode (Démonstration d'une assertion $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$**).** Démontrer une propriété du type $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$, consiste à se donner un élément quelconque x appartenant à l'ensemble E et à démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour cet élément x. La démonstration commence toujours par « Soit $x \in E$ » ou « Soit x un élément de E » et se termine par « Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie. »

Exemple 1.57. Démontrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) \leqslant 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Donc :

$$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x) \geqslant 0.$$

D'où :

$$\sin^2(x) \leqslant 1.$$

III.2 Disjonction de cas

Pour démontrer la véracité d'une assertion $\mathscr{P}$, on peut partir d'une assertion $\mathscr{Q}$ et démontrer que les deux implications $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ et non$(\mathscr{Q}) \implies \mathscr{P}$ sont vraies.

Exemple 1.58. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k \in \mathbb{N}.$$

Sinon, n est impair et s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}.$$

On a donc bien démontré que la propriété est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

9 Démontrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel. On pourra poser $y = \sqrt{2}$ et considérer $y^{\sqrt{2}}$ (très très difficile).

III.3 Raisonnement par négation

Méthode. Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer que non($\mathscr{P}$) est fausse et vice versa.

Exemple 1.59. Démontrons qu'il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres. Notons $\mathscr{P}$ l'assertion :

$$\mathscr{P} \;:\; \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant M.$$

Alors :

$$\text{non}(\mathscr{P}) \;:\; \forall M \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > M.$$

Soit alors $M \in \mathbb{N}$. Posons $n = M+1$. Alors, n est un entier strictement plus grand que M, ce qui démontre que non($\mathscr{P}$) est vraie.

III.4 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde se base sur le fait que l'assertion

$$\Big[\big(\text{non}(\mathscr{P}) \implies \mathscr{Q}\big) \text{ et non}(\mathscr{Q})\Big] \implies \mathscr{P}$$

est toujours vraie.

Méthode. Démontrer par l'absurde qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie consiste à supposer que $\mathscr{P}$ est fausse et à en déduire une absurdité. Ce raisonnement permet alors de conclure que $\mathscr{P}$ est nécessairement vraie.

10 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

III.5 Raisonnement par contraposée

Proposition 1.60

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. Alors :

$$(\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}) \equiv \big[\text{non}(\mathscr{Q}) \implies \text{non}(\mathscr{P})\big].$$

Démonstration. Exercice : écrire la table de vérité correspondante. □

Définition 1.61. L'implication non$(\mathscr{Q}) \implies$ non$(\mathscr{P})$ s'appelle la **contraposée** de l'implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

11 Démontrer que :

$$x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q},$$

en considérant la contraposée de cette assertion.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair alors n l'est aussi.

III.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode destinée à déterminer les solutions d'un problème. Elle se décompose en deux étapes.

- Analyse : on cherche des conditions **nécessaires** sur les solutions éventuelles du problème. On réduit ainsi les solutions potentielles à un petit nombre.
- Synthèse : on vérifie si les solutions éventuelles trouvées à la première étape conviennent et on écarte les «faux-positifs».

Exemple 1.62. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}.$$

- Analyse : soit x une solution de (E). Alors, en élevant au carré :
$$x^2 - 3x = 3x - 5,$$
i.e.
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
et donc :
$$(x - 1)(x - 5) = 0.$$
Ainsi, **si** x est solution, **alors** $x \in \{1, 5\}$.
- Synthèse : soit $x = 5$, alors on a bien :
$$\sqrt{5^2 - 3 \times 5} = \sqrt{3 \times 5 - 5}.$$
Cependant, pour $x = 1$, l'équation (E) n'a pas de sens et donc il faut écarter la «fausse solution» $x = 1$.

Conclusion : l'équation (E) admet pour unique solution $x = 5$.

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Indication : on pourra écrire $f = g + h$ puis calculer $f(x) + f(-x)$ et $f(x) - f(-x)$.

III.7 Démonstration par récurrence

Théorème 1.63

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Si :

(i) $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie, (**initialisation**)

(ii) pour tout $n \geqslant n_0$, l'assertion $\big(\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)\big)$ est vraie, (**hérédité**)

alors, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. (**conclusion**)

Exemple 1.64. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Notons :

$$\mathscr{P}(n) : 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

- **Initialisation**. $\mathscr{P}(1) : 1 = 1$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2(n+1)-1) &= [1 + 3 + \ldots + (2n-1)] + [2(n+1)-1] \\ &= n^2 + [2n+1] \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

  et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion**. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition 1.65. On appelle suite **arithmétique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r,$$

où $r \in \mathbb{C}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et est appelé **raison** de la suite.

Proposition 1.66

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Exercice. □

14 Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- simplifier des expressions faisant intervenir les fonctions usuelles,
- résoudre des (in)équations faisant intervenir les fonctions usuelles,

I Puissance entière d'un nombre réel

I.1 Introduction

Définition 2.1. Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, le nombre x^n est défini par :

$$\begin{cases} x^0 = 1, \\ \forall n \geqslant 1,\ x^n = x \cdot x^{n-1}. \end{cases}$$

Définition 2.2. Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, le nombre x^{-n} est défini par :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Propriétés 2.3

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, alors :

(i) $(xy)^n = x^n y^n$

(ii) $x^{n+m} = x^n x^m$

(iii) $(x^n)^m = x^{nm}$

(iv) $x^{n-m} = \dfrac{x^n}{x^m}$

(v) si $y \neq 0$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

Remarque 2.4. Ces propriétés se retrouvent très facilement en écrivant :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Attention. Ne pas inventer de formule du type $x^n \cdot x^m = x^{nm}$. En cas de doute, se reporter à la remarque précédente.

15 *Python.* Écrire une fonction permettant le calcul de x^n où x et n seront les deux paramètres de la fonction. On n'utilisera pas l'opérateur `x**n` et on pourra proposer deux versions de ce programme : une itérative et une récursive.

16 *Application directe.* Écrivez les nombres définis ci-dessous sous la forme a^n où n est un entier relatif et a est le plus petit entier naturel possible :

$$\frac{2^1}{2^{-3}},\quad \frac{4^3}{4^1},\quad \frac{10^1}{10^{-5}},\quad \frac{4^5}{4^{-4}} \quad \text{et} \quad \frac{2^6}{4^4}.$$

17 *Application directe.* Écrivez les nombres définis ci-dessous sous la forme d'un produit de puissances d'entiers les plus petits possibles :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^8 \times \left(\frac{7}{6}\right)^8,\quad 2^{-9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{-9},\quad \left(\frac{5}{8}\right)^{-8} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{-8},\quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{9}\right)^{-5} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{-5}.$$

18 *Application directe.* Soient a et b deux nombres réels non nuls. Écrire les nombres ci-dessous sous la forme $a^n b^m$ où n et m sont deux entiers relatifs à déterminer.

$$A = \frac{\frac{a^3b^4}{b^{-2}}}{\frac{b^4}{b^{-2}}}, \quad B = \frac{\frac{\frac{a^3b^4}{b^{-2}}}{b^4}}{b^{-2}} \quad \text{et} \quad C = \frac{ab^2}{\frac{a^2b}{2a^3b^2}}.$$

19 *Python.* À faire à la maison, uniquement si cela vous intéresse. Érire un programme Python qui génère des fractions du type de celles présentées dans l'exercice 18 où les valeurs des exposants sont tirées aléatoirement et qui calcule la réponse. Indication : pour tirer aléatoirement des entiers on pourra chercher à comprendre ce que fait le code ci-dessous :

```python
import numpy as np
x = np.random.randint(1,4, size=5)
print(x)
```

I.2 Les fonctions puissance

Définition 2.5. Les fonctions puissance d'exposant entier relatif sont les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{cccc} f_k & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^k \end{array}$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

Rappel 2.6. On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **paire** lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

20 Démontrer que le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pourra considérer les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(-x, f(x))$, démontrer qu'ils sont sur le graphe et qu'ils sont symétriques.

Rappel 2.7. On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **impaire** lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

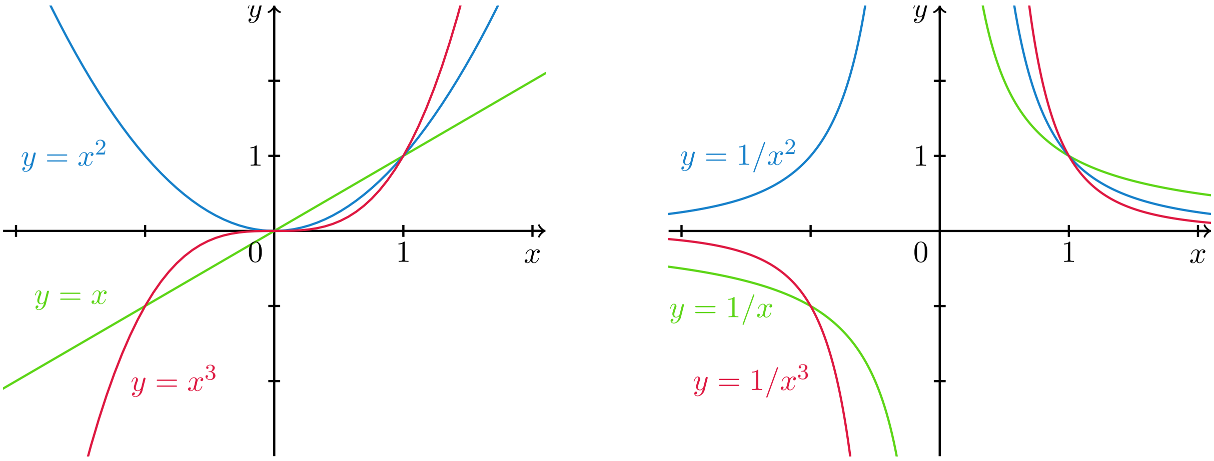
21 Démontrer que le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Remarque 2.8. Les fonctions paires et impaires tirent leurs noms des fonctions puissances : lorsque n est pair (respectivement impair), $x \mapsto x^n$ est paire (respectivement impaire).

Propriété 2.9

Les fonctions f_k de la définition 2.5 sont :
- paires lorsque k est paire,
- impaires lorsque k est impaire.

Illustration 2.10. Graphe des fonctions $x \mapsto x^k$ pour différentes valeurs de $k \in \mathbb{Z}$.



Proposition 2.11

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x^k\right)' = kx^{k-1}.$$

22 *Python.* Écrire un programme en Python qui trace le graphe des fonctions $x \mapsto x^k$ pour quelques valeurs de k de votre choix (en prendre des négatives et des positives et tout afficher sur le même graphique). On pourra s'inspirer de ce bout de code :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.arange(0,4,.01)
y1 = np.sin(x)
y2 = np.cos(x)

fig, ax = plt.subplots()

plt.plot(x, y1, label='y=sin(x)')
plt.plot(x, y2, label='y=cos(x)')

ax.legend(loc='upper right')
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")

plt.show()
```

I.3 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition 2.12. Considérons la fonction :

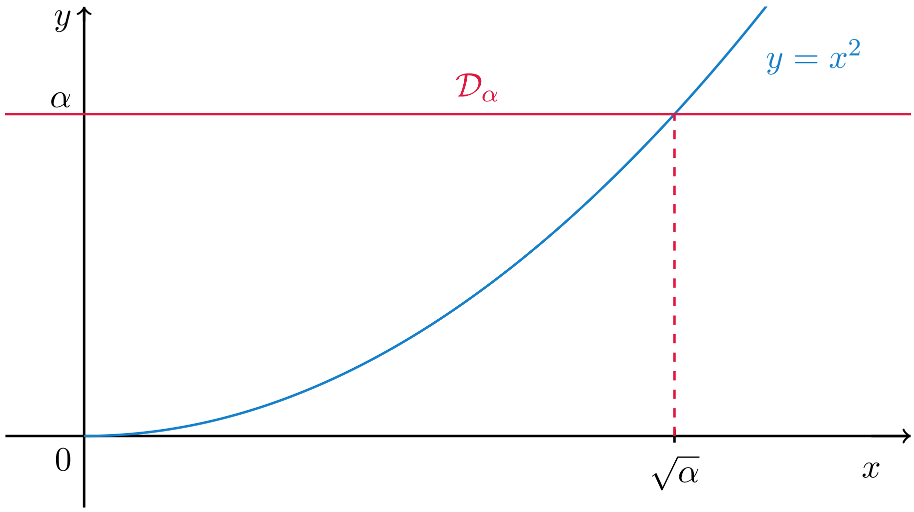
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Alors, f étant continue, de limites respectives 0 et $+\infty$ en 0 et en $+\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha = f(x).$$

De plus, f étant strictement croissante, le nombre x de l'assertion précédente est unique. Autrement dit, tout nombre réel positif α admet exactement un antécédent par f. Cet antécédent est appelé la **racine carrée** de α et noté $\sqrt{\alpha}$.

Illustration 2.13. Graphiquement, cela signifie que pour tout $\alpha \geqslant 0$, la courbe représentative de f rencontre exactement une fois la droite $\mathcal{D}_\alpha : x = \alpha$.



Remarque 2.14. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, l'équation $x^2 = \alpha$ admet exactement deux solutions. **La** racine carrée de α est définie comme étant la solution positive de cette équation.

Remarque 2.15. Notons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, $\overline{\alpha}\!\diagdown\!\!\!\!\vee$ la solution négative de l'équation $x^2 = \alpha$. On a alors en particulier :

$$\overline{4}\!\diagdown\!\!\!\!\vee = -2 \quad \text{et} \quad \overline{1}\!\diagdown\!\!\!\!\vee = -1.$$

Ainsi, on ne peut pas écrire :

$$-2 = \overline{4}\!\diagdown\!\!\!\!\vee = \overline{4 \times 1}\!\diagdown\!\!\!\!\vee = \overline{4}\!\diagdown\!\!\!\!\vee \times \overline{1}\!\diagdown\!\!\!\!\vee = (-2) \times (-1) = 2.$$

De ce fait, les propriétés usuelles du symbole radical ($\sqrt{\ }$) ne sont pas vérifiées par le symbole $\overline{\ }\!\diagdown\!\!\!\!\vee$. Le choix de prendre l'unique solution positive dans la définition de la racine carrée nous permet donc d'utiliser les propriétés usuelles. Nous verrons au chapitre 6 qu'il n'est pas possible d'étendre la définition de la racine carrée à un ensemble plus grand que $\mathbb{R}_+$ tout en conservant ces propriétés.

Propriétés 2.16

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Alors :

(i) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

(ii) $(\sqrt{x})^2 = x$

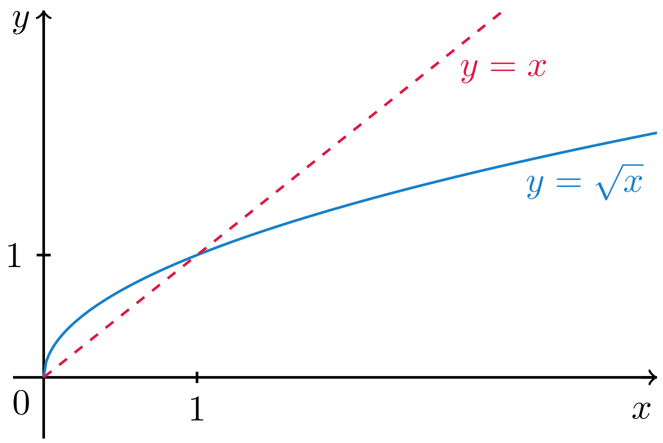
(iii) $\sqrt{x^2} = x$

(iv) si $y \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Remarque 2.17. En général, lorsque $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Attention. Ne pas inventer de formule du type $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. En cas de doute, prendre des valeurs de x et de y «au hasard» et vérifier sur un exemple (ce qui ne constitue évidemment pas une preuve !).

Illustration 2.18. Graphe de la fonction racine carrée.



Proposition 2.19

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Remarque 2.20. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 où son graphe présente une demi-tangente verticale.

I.4 Racine n-ième

Définition 2.21. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier pair. Alors, pour tout $\alpha \geqslant 0$, l'équation $x^n = \alpha$ admet exactement une solution. Pour s'en convaincre, on pourra reprendre l'illustration graphique faite pour la racine carrée. Cette solution, notée $\sqrt[n]{\alpha}$ ou encore $\alpha^{1/n}$, est appelée la **racine n-ième** du nombre α.

Exemple 2.22. Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée. Pour $n = 4$, on a par exemple :

$$\sqrt[4]{625} = 5,$$

puisque $5^4 = 625$.

23 *Python.* Recopier ces lignes de code dans l'interpréteur Python. Que remarque-t-on ?

```python
import sympy as s

print((-8)**(1/3))
print(s.root(-8,3).evalf())
print(s.real_root(-8,3))
```

Définition 2.23. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier impair. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation $x^n = \alpha$ admet exactement une solution. Cette solution, notée $\sqrt[n]{\alpha}$ ou encore $\alpha^{1/n}$, est appelée la **racine n-ième** du nombre α.

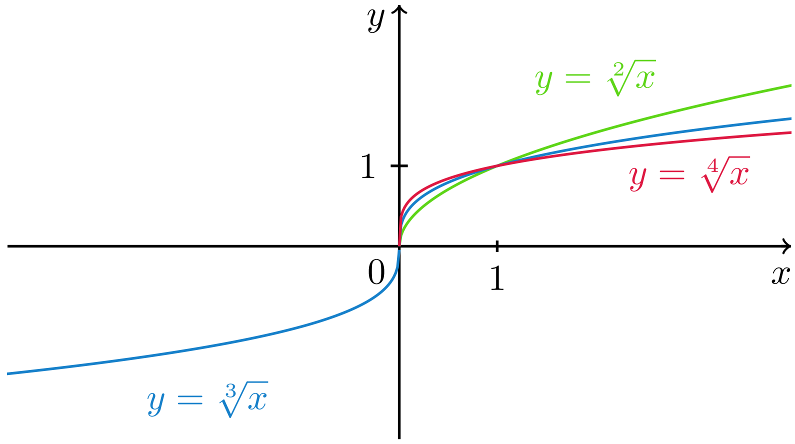
Exemple 2.24. Pour $n = 1$, on a évidemment $\sqrt[1]{x} = x$. Pour $n = 3$, on a par exemple :

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

En effet, $(-2)^3 = 8$.

Remarque 2.25. Les racines n-ièmes vérifient des propriétés similaires aux racines carrées. Cependant, nous ne les présenterons que dans la partie III où nous en donnerons une forme généralisée.

Illustration 2.26. Graphes des fonctions racines n-ièmes pour quelques valeurs particulières de n.



Proposition 2.27

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est dérivable sur son ensemble de définition privé de 0 et sa dérivée est donnée pour tout x par :

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

I.5 Puissance rationnelle d'un nombre réel

Définition 2.28. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Lorsque le membre de droite de l'égalité ci-dessous est bien défini (suivant la parité de q et le signe de x), on pose :

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Remarque 2.29. On peut démontrer que, lorsque ces quantités sont bien définies :

$$\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Proposition 2.30

Soit $a \in \mathbb{Q}$. La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur son ensemble de définition privé de 0 et sa dérivée est donnée pour tout x par :

$$(x^a)' = a\, x^{a-1}.$$

II Les fonctions logarithme et exponentielle

Définition 2.31. On appelle **logarithme népérien** et on note ln la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \ln & : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Remarque 2.32. La fonction ln ainsi définie est la primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\star$ qui s'annule en 1.

Proposition 2.33

La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (c'est-à-dire infiniment dérivable) et :

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition. □

Théorème 2.34

Pour tout $(x, y) \in (]0;+\infty[)^2$ et pour tout $a \in \mathbb{Q}$:

(i) $\ln(1) = 0$,

(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

(iii) $\ln(1/x) = -\ln(x)$,

(iv) $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

Remarque 2.35. Le dernier point est encore vrai lorsque $a \in \mathbb{R}$. Cependant, à ce stade du cours, nous n'avons pas encore défini le nombre x^a avec a réel.

Propriété 2.36. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = \ln(x)$ admet exactement une solution $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Cette solution est appelée **exponentielle** de y et notée e^y ou encore $\exp(y)$.

Proposition 2.37

La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (c'est-à-dire infiniment dérivable) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

Théorème 2.38

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $a \in \mathbb{Q}$:

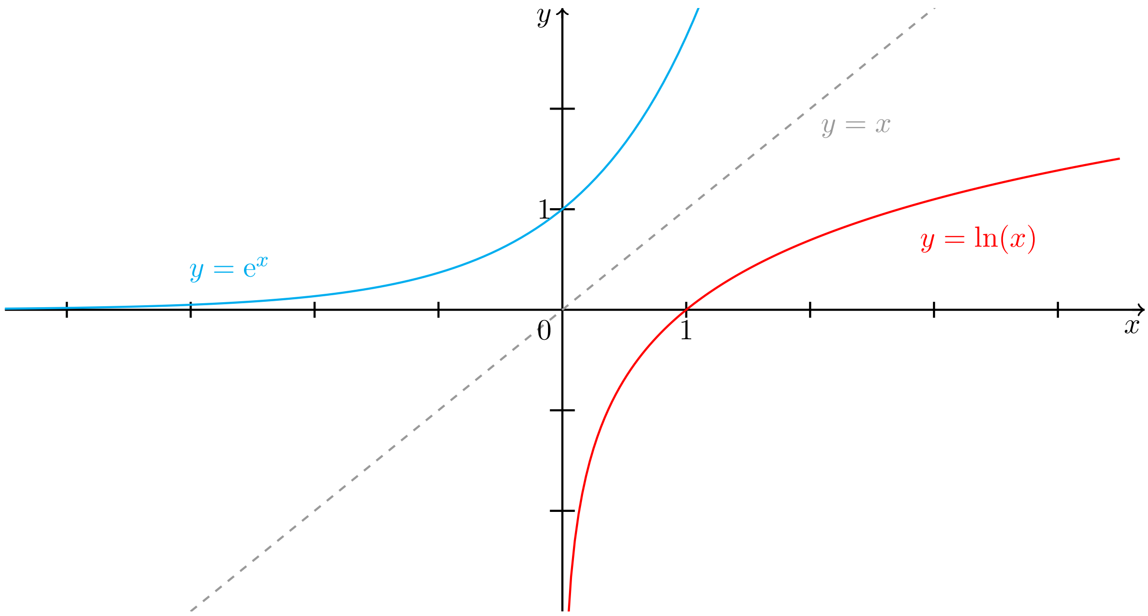
(i) $e^{x+y} = e^x e^y$,

(ii) $e^{-x} = 1/e^x$,

(iii) $e^{xa} = (e^x)^a$.

Remarque 2.39. Le dernier point est encore vrai lorsque $a \in \mathbb{R}$. Cependant, à ce stade du cours, nous n'avons toujours par défini le nombre x^a avec a réel.

Illustration 2.40. Graphe des fonctions logarithme népérien et exponentielle.



III Puissance réelle d'un nombre positif

Proposition 2.41

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et soit $a \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

Définition 2.42. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit pour tout $x > 0$ le nombre x^a par :

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

Remarque 2.43. Cette définition prolonge celle vue précédemment pour $a \in \mathbb{Q}$ d'après la proposition 2.41.

Proposition 2.44

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad (x^a)' = ax^{a-1}.$$

Proposition 2.45

Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ et soit $(a, b) \times \mathbb{R}^2$. Alors :

(i) $(xy)^a = x^a y^a$

(ii) $x^{a+b} = x^a x^b$

(iii) $(x^a)^b = x^{ab}$

(iv) $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$

(v) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- dresser un tableau de signes
- développer une expression
- factoriser une expression
- établir des (in)égalités, résoudre des (in)équations faisant intervenir des polynômes, la fonction racine carrée et la valeur absolue.
- effectuer des calculs mettant en jeu la valeur absolue

I Rappels sur les fractions

Rappel 3.1. Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que b et d soient non nuls. Alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Attention. L'emplacement du trait de fraction par rapport au symbole d'égalité a une importance ! Par exemple, les nombres définis ci-dessous ne sont pas égaux :

$$A = \frac{\frac{3}{2}}{5} \quad \text{et} \quad B = \frac{3}{\frac{2}{5}}.$$

Propriétés 3.2

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$. Alors :

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

24 *Application directe.* Simplifier les expressions ci-dessous :

$$A = \frac{\frac{3}{2}}{5} \quad \text{et} \quad B = \frac{3}{\frac{2}{5}}.$$

II Développer et factoriser une expression

II.1 Introduction

Rappel 3.3. On dit qu'une expression est écrite sous forme **factorisée** lorsqu'elle est écrite comme un produit d'au moins deux termes. Lorsqu'on développe les produits d'une forme factorisée, on dit que l'expression obtenue est écrite sous forme développée.

Exemple 3.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'expression suivante : $A = (x+1)^2 - 2(x+1)$. Une forme développée de A, obtenue après calculs, est $A = x^2 - 1$. Une forme factorisée de A est $A = (x-1)(x+1)$.

II.2 Développer une expression

Propriété 3.5

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

25 *Application directe.* Démontrer les propriétés précédentes.

Remarque 3.6. Il existe une formule générale pour développer $(a + b)^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) que nous verrons en MTA. Les coefficients qui y apparaîssent se retrouvent dans le triangle de Pascal

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

26 Soient x et y deux nombres réels. Développer $(x - y)^3$ et $(x + 2y)^4$.

II.3 Factoriser une expression

II.3.1 Reconnaissance d'un facteur commun

Méthode. Pour factoriser une expression sous forme d'une somme d'au moins deux termes, on pourra chercher un facteur commun aux termes et utiliser la formule usuelle :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad ab + ac = a(b + c)$$

Exemple 3.7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factorisons l'expression ci-dessous :

$$A(x) = (x + 1)(2x + 3) - (3x + 3)(x - 4).$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 1)(2x + 3) - 3(x + 1)(x - 4) \\ &= (x + 1)\left((2x + 3) - 3(x - 4)\right) \\ &= (x + 1)(2x + 3 - 3x - 12) \\ &= (x + 1)(-x - 9) \\ &= -(x + 1)(x + 9) \end{aligned}$$

27 *Application directe.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser :

$$B(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 3) - (2x + 2)^2(x + 7).$$

II.3.2 Identités remarquables

Proposition 3.8

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

(i) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(iii) $a^n - 1 = (a-1)(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})$.

Remarque 3.9. La troisième propriété se généralise comme nous le verrons en MTA :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Exemple 3.10. Factorisons l'expression : $A(x) = (1-x)^3 - x^3$. D'après la proposition 3.8, on a :

$$\begin{aligned} A(x) &= ((1-x)-x)\left((1-x)^2+(1-x)x+x^2\right) \\ &= (1-2x)(1-2x+x^2+1-x^2+x^2) \\ &= (1-2x)(2-2x) \end{aligned}$$

28 *Application directe.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $2 - x^n$.

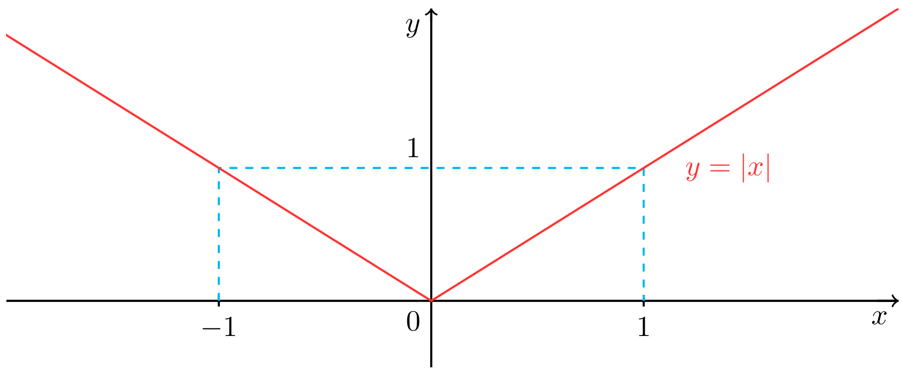
III Rappels sur la valeur absolue

Définition 3.11. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemples 3.12. $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|-40| = 40$.

Illustration 3.13. Graphe de la fonction valeur absolue.



Propriétés 3.14

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

(i) $|x| \geqslant 0$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Remarque 3.15. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$. Alors :
- $|x| = \max(x, -x)$;
- $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$.

29 Résoudre l'inéquation d'inconnue x suivante : $|x-2| \leqslant 4$. Tracer ensuite le graphe de la fonction $x \mapsto |x-2|$ et illustrer le résultat.

30 *Python.* Python connaît évidemment la fonction valeur absolue (nommée `abs`). Si elle n'existait pas déjà, comment pourrions-nous la définir ?

IV Résolution d'équations

IV.1 Équations du premier degré

Définition 3.16. Une équation du premier degré est une équation de la forme :

$$ax + b = 0,$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont des paramètres fixés et où x est l'inconnue.

31 Déterminer en fonction des valeurs des paramètres a et b la (les) solution(s) éventuelle(s) de l'équation $ax + b = 0$ (on pourra raisonner par disjonction de cas).

IV.2 Équations du second degré

Définition 3.17. Une équation du second degré est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont des paramètres fixés et où x est l'inconnue.

Théorème 3.18

Soient $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0.$$

On appelle **discriminant** de (E) le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution (dite **double**) donnée par :

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions données par :

$$x_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est un nombre (éventuellement complexe) tel que $\delta^2 = \Delta$.

Remarque 3.19. Lorsque Δ est positif, les solutions sont réelles. Cependant, lorsque Δ est strictement négatif, les solutions sont complexes et conjuguées.

32 Démontrer la remarque précédente.

33 Résoudre les deux équations ci-dessous sans utiliser le discriminant :
$(E_1)\ :\ 4x^2 - 4x + 1 = 0$
$(E_2)\ :\ (x-1)(x+2) - (1-x)(x+3) = 0$

34 *Application directe.* Déterminer les solutions de l'équation suivante : $x^2 - 2x + 2 = 0$.

IV.3 Équations de degré supérieur

Remarque 3.20. Il existe des techniques pour la résolution des équations polynomiales de degré 3 et 4 mais elles sont hors programme. On peut démontrer qu'il n'existe pas de formule générale pour les équations de degré 5 ou plus[1].

IV.3.1 Recherche de racines évidentes

Méthode. Pour déterminer les racines d'une expression polynomiale, on pourra essayer de trouver une racine évidente α (c'est-à-dire une valeur α qui annule l'expression). Le cas échéant, on pourra factoriser l'expression par $x - \alpha$.

Exemple 3.21. Considérons l'équation :
$$(E)\ :\ x^3 - \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$$
On remarque que $x = 1$ est solution de cette équation. Il existe donc des réels a, b et c tels que :
$$x^3 - \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$
En développant le membre de droite dans l'égalité ci-dessus et en identifiant les coefficients des deux polynômes, on peut trouver les valeurs de a, b et c :
$$x^3 - \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = (x-1)(x^2 + (1-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}).$$
Il ne reste alors plus qu'à déterminer les racines d'un polynôme du second degré pour finir de résoudre (E).

35 *Application directe.* Terminer la résolution de l'exemple précédent.

IV.3.2 Recherche d'un facteur commun

Comme nous l'avons déjà vu au paragraphe II.3.1, il est possible dans certains cas de factoriser une expression, ce qui peut simplifier la recherche de racines.

Exemple 3.22. Déterminons les solutions de l'équation :
$$(E)\ :\ (x-1)(x^3 - 2x) - (2-2x)(x - x^2) = 0.$$
On remarque que l'on peut factoriser le membre de gauche par $(x-1)$:
$$\begin{aligned}(x-1)(x^3-2x) - (2-2x)(x-x^2) &= (x-1)(x^3-2x) + 2(x-1)(x-x^2)\\ &= (x-1)\big((x^3-2x) + 2(x-x^2)\big)\\ &= (x-1)(x^3-2x^2)\\ &= (x-1)x^2(x-2).\end{aligned}$$
Ainsi, les solutions de (E) sont 0, 1 et 2.

1. De manière plus précise, il n'existe pas d'expression algébrique finie ne faisant intervenir que les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$ et $\sqrt{\cdot}$ qui puisse produire les solutions à partir des coefficients et qui fonctionne pour toutes les équations.

IV.4 Équations faisant intervenir la valeur absolue

Méthode. Pour résoudre une équation faisant intervenir des valeurs absolues, on pourra procéder à une disjonction de cas portant sur le signe des quantités apparaissant dans les valeurs absolues.

Exemple 3.23. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) \ : \ |x-5| = 2\,|x+5|\,.$$

Commençons par dresser un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$x-5$			$-$		0	$+$	
$x+5$		$-$	0		$+$		

Nous allons donc résoudre (E) sur trois intervalles : $]-\infty,-5]$, $]-5,5]$ et $]5,+\infty[$.

- Premier cas : $x \in]-\infty,-5]$. On a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff -(x-5) = 2\times(-(x+5))\\ &\iff -x+5 = -2x-10\\ &\iff x = -15\end{aligned}$$

  Comme $-15 \in]-\infty,-5]$, alors $x=-15$ est solution de (E), et c'est l'unique solution de (E) sur $x \in]-\infty,-5]$.

- Deuxième cas : $x \in]-5,-5]$. On a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff -(x-5) = 2(x+5)\\ &\iff -x+5 = 2x+10\\ &\iff x = -5/3\end{aligned}$$

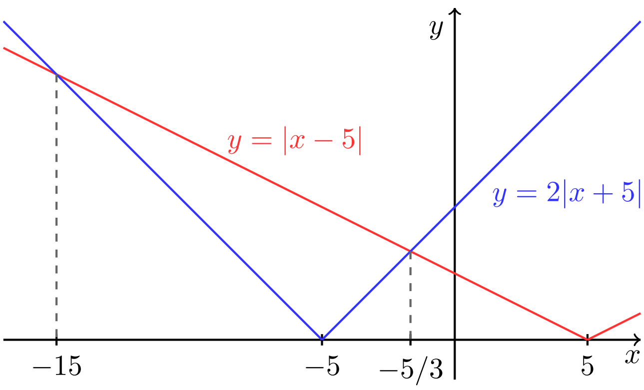
  Comme $-5/3 \in]-5,5]$, alors $x=-5/3$ est solution de E ,et c'est l'unique solution de (E) sur $x \in]-5,5]$.

- Troisième cas : $x \in]5,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff (x-5) = 2(x+5)\\ &\iff x+5 = 2x+10\\ &\iff x = -10/3\end{aligned}$$

  Comme $-10/3 \notin]-5,+\infty[$, on en déduit $x=-10/3$ n'est pas solution de (E).

Conclusion : l'équation (E) admet deux solutions qui sont -15 et $-5/3$. Graphiquement, cela signifie que les graphes des fonctions $x \mapsto |x-5|$ et $x \mapsto 2|x+5|$ se croisent deux fois sur $\mathbb{R}$ (une fois en -15 et une fois en $-5/3$) :



36 *Application directe.* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|2x-1|+|x+4|=7$.

37 *Pour approfondir.* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x^2-3x+2|=\dfrac{1}{4}$.

V Résolution d'inéquations et manipulation d'inégalités

V.1 Rappels sur les inégalités

Propriétés 3.24. La **relation d'ordre** $\leqslant$ est **compatible** avec l'addition et la multiplication par un scalaire positif, au sens où, pour tous réels a, b, c et d :

$$\begin{array}{rcl} a \leqslant b & \Longrightarrow & -b \leqslant -a \\ a \leqslant b \text{ et } c > 0 & \Longrightarrow & ac \leqslant bc \\ a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d & \Longrightarrow & a+c \leqslant b+d. \end{array}$$

Remarque 3.25. Ces propriétés sont encore valables pour les relations d'ordre $\geqslant$, $<$ et $>$.

38 Donner un encadrement de $x+y$ et un encadrement de xy lorsque $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$

V.2 Inégalités et valeur absolue

Méthode. Pour résoudre une inéquation faisant intervenir des valeurs absolues, on pourra procéder à une disjonction de cas portant sur le signe des quantités apparaissant dans les valeurs absolues.

Remarque 3.26. Dans le cas particulier où une seule valeur absolue est en jeu dans l'inéquation, la résolution peut s'avérer immédiate puisque pour tout x réel et pour tout $\alpha \geqslant 0$:

$$|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha.$$

39 *Application directe.* Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $|2x+3| \geqslant 1$.

Exemple 3.27. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(E) \quad : \quad \left|1-\frac{x}{2}\right| \geqslant |x+2|\,.$$

Écrivons le tableau de signes correspondant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$1-\frac{x}{2}$			$+$		0	$-$	
$x+2$		$-$	0		$+$		

Nous allons donc résoudre (E) sur trois intervalles : $]-\infty,-2]$, $]-2,2]$ et $]2,+\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Premier cas : $x \in]-\infty,-2]$. On a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff 1-\frac{x}{2} \geqslant -(x+2) \\ &\iff \frac{x}{2} \geqslant -3 \\ &\iff x \geqslant -6 \end{aligned}$$

Comme $x \in]-\infty, -2]$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty, -2]$ est $[-6, -2]$.

- Deuxième cas : $x \in]-2, 2]$. On a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff 1 - \frac{x}{2} \geqslant x + 2 \\ &\iff -\frac{3}{2}x \geqslant 1 \\ &\iff x \leqslant -2/3 \end{aligned}$$

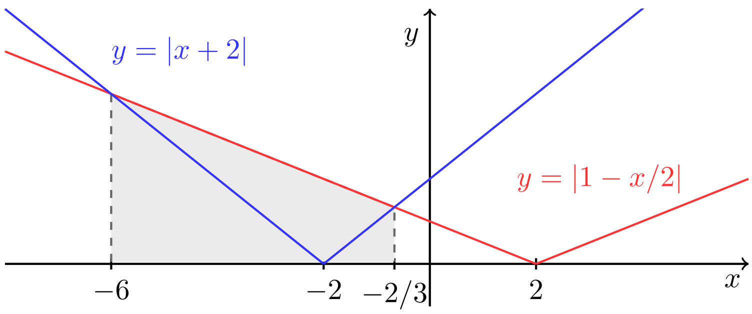
Comme $x \in]-2, 2]$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-2, 2]$ est $]-2, -2/3]$.

- Troisième cas : $x \in]2, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff -\left(1 - \frac{x}{2}\right) \geqslant x + 2 \\ &\iff -\frac{1}{2}x \geqslant 3 \\ &\iff x \leqslant -6 \end{aligned}$$

Comme $x \in]2, +\infty[$, (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

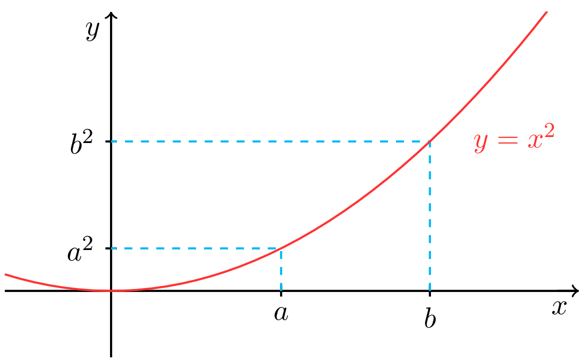
Conclusion : l'équation (E) admet pour ensemble de solutions l'intervalle $[-6, -2/3]$. Graphiquement, cela signifie que le graphe de la fonction $x \mapsto |1 - x/2|$ est au-dessus de celui de la fonction $x \mapsto |x + 2|$ sur tout l'intervalle $[-6, -2/3]$ (et pas ailleurs).



V.3 Inégalités et passage au carré

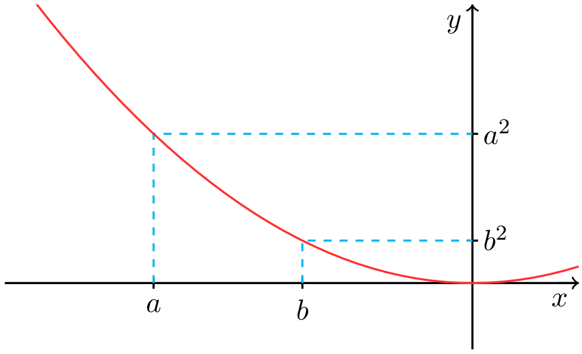
Remarque 3.28. Les inégalités sont compatibles avec les fonctions croissantes. On a donc en particulier, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$0 \leqslant a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0^2 \leqslant a^2 \leqslant b^2.$$



La fonction carré étant décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on a aussi :

$$a \leqslant b \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 0^2 \geqslant a^2 \geqslant b^2.$$



Méthode. Pour élever au carré une inégalité, on s'assure d'abord que tout est positif ou que tout est négatif. Si ce n'est pas le cas, on pourra procéder par disjonction de cas.

Exemple 3.29. Encadrons x^2+1 sachant que $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Soit $x \in [-1, 2]$.

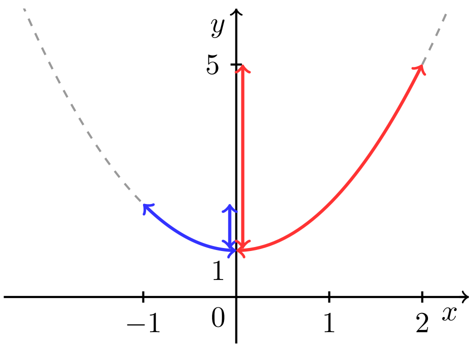
- Premier cas : $x \leqslant 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant x \leqslant 0 &\Longrightarrow (-1)^2 \geqslant x^2 \geqslant 0^2 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant x^2+1 \leqslant 2. \end{aligned}$$

- Deuxième cas : $x \geqslant 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 2 &\Longrightarrow 0^2 \geqslant x^2 \geqslant 2^2 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant x^2+1 \leqslant 5. \end{aligned}$$

Conclusion : $-1 \leqslant x \leqslant 2 \implies 1 \leqslant x^2+1 \leqslant 5$. Sur le graphe ci-après on a représenté en bleu le premier cas et en rouge le deuxième cas :



Remarque 3.30. Dans certains cas, on peut travailler avec des équivalences, mais il est plus prudent de commencer dans un premier temps à raisonner par implications, quitte à vérifier par la suite que l'on peut remonter les calculs et remplacer les implications par des équivalences le cas échéant.

V.4 Inégalités et passage à la racine

Remarque 3.31. La fonction racine carrée étant croissante, on sait que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad x \leqslant y \implies \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}.$$

Ainsi, on peut passer à la racine carrée dans une inégalité après s'être assuré que les quantités en jeu sont positives.

Exemple 3.32. Soit x un nombre réel. On suppose que $(x+1)^2 \leqslant 4$. Que peut-on en déduire pour x ? On remarque que :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 4 &\implies \sqrt{0} \leqslant \sqrt{(x+1)^2} \leqslant \sqrt{2} \\ &\implies 0 \leqslant |x+1| \leqslant 2 \\ &\implies -2 \leqslant x+1 \leqslant 2 \\ &\implies -3 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$

V.5 Inégalités et passage à l'inverse

Attention. La fonction inverse n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}^\star$. Cependant, elle est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Méthode. Pour passer à l'inverse dans une inégalité, on s'assure d'abord que tout est positif ou que tout est négatif. Si ce n'est pas le cas, on pourra procéder par disjonction de cas.

40 *Application directe.* Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $3 \leqslant x+2 \leqslant 4$. Donner un encadrement de $1/x - 2$.

Exemple 3.33. Soit x un réel non nul. On suppose que $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Que peut-on dire sur $1/x$? Procédons par disjonction de cas.

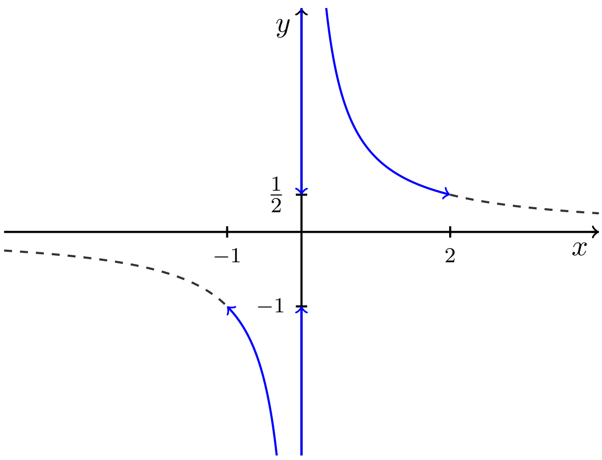
- Premier cas : $x > 0$. On a alors :

$$0 < x \leqslant 2 \implies x \geqslant \frac{1}{2}$$

- Deuxième cas : $x < 0$. On obtient :

$$-1 \leqslant x < 0 \implies \frac{1}{-1} \geqslant x$$

Conclusion : $x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$. Sur le graphique ci-dessous on a représenté la fonction inverse et on a mis en évidence les valeurs qu'elle prend sur l'ensemble d'intérêt.



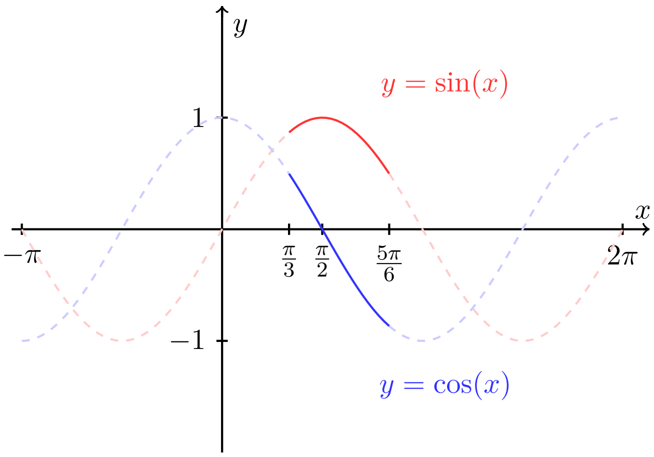
V.6 Inégalités et fonctions : cas général

Remarque 3.34. En général, on ne peut pas composer des inégalités avec des fonctions. Il faut donc souvent procéder par disjonction de cas en se ramenant à des ensembles sur lesquels les fonctions sont monotones. En effet, si f est une fonction croissante sur $[a, b]$ et décroissante sur $[b, c]$ (où a, b et c sont trois réels), alors on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a \leqslant x \leqslant b &\implies f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \\ b \leqslant x \leqslant c &\implies f(b) \geqslant f(x) \geqslant f(c) \end{aligned}$$

On pourra ensuite donner un encadrement de $f(x)$ sur $[a, b]$ en combinant ces deux résultats.

Exemple 3.35. Soit $x \in [\pi/3, 5\pi/6]$. Donnons un encadrement de $\cos(x)$ et un encadrement de $\sin(x)$. Commençons par déterminer l'éventuelle monotonie des fonctions sinus et cosinus sur $[\pi/3, 5\pi/6]$.



On remarque que sur l'intervalle d'intérêt, la fonction cosinus est décroissante. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} &\implies \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \geqslant \cos(x) \geqslant \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\implies \frac{1}{2} \geqslant \cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Cependant, la fonction sinus change de monotonie, on peut donc procéder à une disjonction de cas.

- Premier cas : $x \in [\pi/3, \pi/2]$. Sur cet intervalle, la fonction sinus est croissante, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} &\implies \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sin(x) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\implies \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \end{aligned}$$

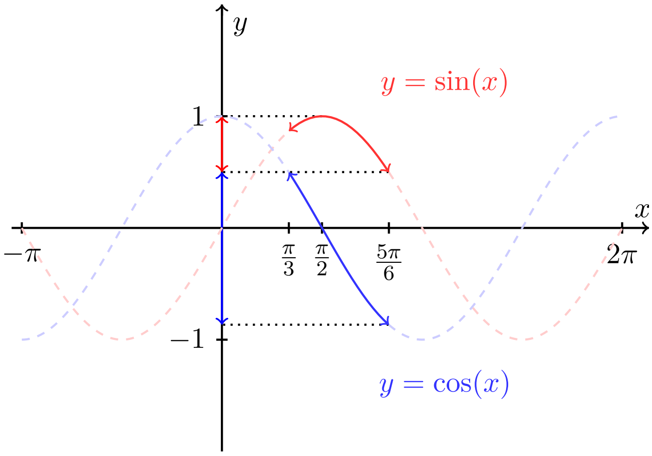
- Deuxième cas : $x \in [\pi/2, 5\pi/6]$. Sur cet intervalle, la fonction sinus est décroissante, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} &\implies \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant \sin(x) \geqslant \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\implies 1 \geqslant \sin(x) \geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

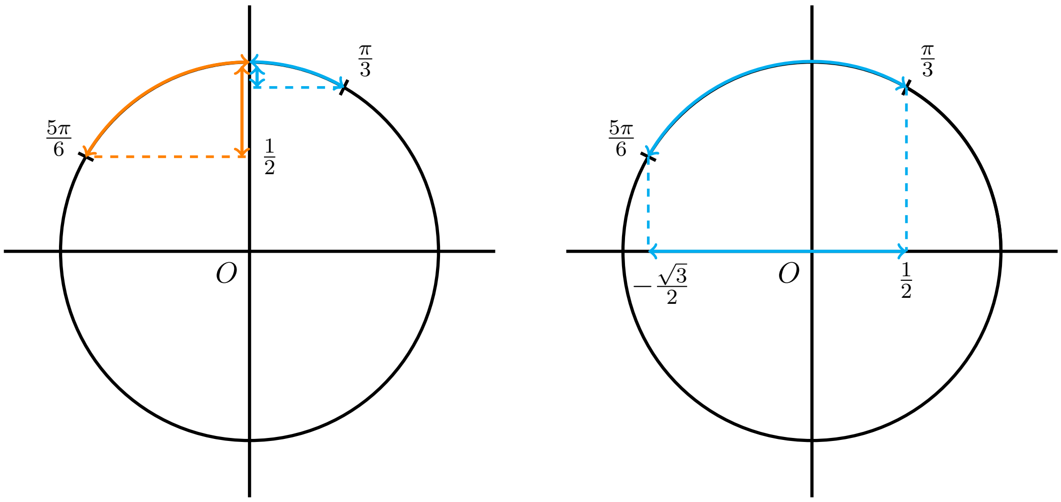
Conclusion :

$$x \in [\pi/3, 5\pi/6] \implies \frac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

Remarquons que l'on peut retrouver ce résultat à partir des graphes des fonctions sinus et cosinus :



On peut aussi retrouver les monotonies respectives des fonctions sinus et cosinus en dessinant le cercle trigonométrique, et même résoudre directement les inéquations demandées sur le cercle :



41 *Pour approfondir.* Déterminer un encadrement de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ lorsque $x \in [3/2, 7/2]$.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- représenter graphiquement une suite réelle
- reconnaître et étudier une suite arithmétique
- reconnaître et étudier une suite géométrique
- déterminer la monotonie éventuelle d'une suite
- démontrer un résultat par récurrence
- maîtriser les opérations sur les limites
- déterminer la limite d'une suite à l'aide du théorème des gendarmes
- déterminer la limite d'une suite à l'aide du théorème de comparaison
- déterminer la limite d'une suite à l'aide du théorème de la limite monotone
- appliquer le théorème des croissances comparées pour déterminer des limites de suites

I Introduction

I.1 Premières définitions

Définition 4.1. Une **suite numérique** est une application $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On note indifféremment $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_n$. On dit que u_n est le **terme général** de la suite. Lorsque la suite $(u_n)_n$ ne prend que des valeurs réelles, on dit que $(u_n)_n$ est une suite **réelle** (ou suite **de nombres réels**).

Remarque 4.2. Il se peut qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. On note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Pour simplifier, on supposera dans la suite que $n_0 = 0$ ou parfois que $n_0 = 1$.

Exemple 4.3. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est la suite dont les termes successifs sont $1, -1, 1, -1, \ldots$

Attention. Ne pas confondre u_n qui désigne le n-ième terme de la suite et $(u_n)_n$ qui désigne la suite. En particulier, on n'écrira pas «u_n est croissante».

Définition 4.4. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

Remarque 4.5. Attention à l'ordre des quantificateurs ! Le réel M doit majorer tous les éléments de la suite.

Définition 4.6. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **minorée** si :

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n.$$

Définition 4.7. Une suite réelle est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque 4.8. En termes de quantificateurs, une suite $(u_n)_n$ est donc bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$

42 *Application directe.* Démontrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 2n + 1$ n'est pas majorée.

43 *Application directe.* Démontrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \cos^2(n) + 2$ est bornée.

44 *Application directe.* Donner un exemple de suite majorée mais non minorée.

Définition 4.9. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}.$$

On définit de manière similaire ce qu'est une suite **décroissante**, **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

45 *Application directe.* On considère la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

Déterminer la monotonie éventuelle de $(u_n)_n$.

46 *Application directe.* Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Un étudiant écrit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ldots \geqslant 1.$$

Que peut-on en déduire ?

I.2 Convergence d'une suite réelle

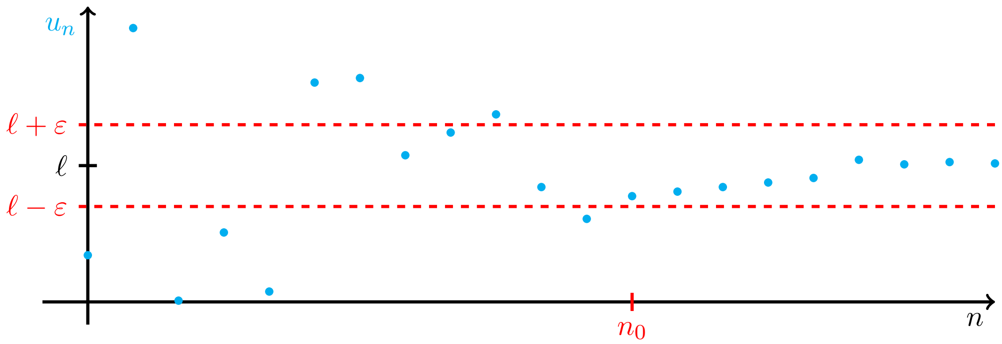
I.2.1 Limite finie

Définition 4.10. On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit que l'on veut) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,$$

ou encore simplement $u_n \to \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Illustration 4.11. Sur le dessin ci-dessous, on a représenté une suite $(u_n)_n$ de limite ℓ. On a choisi un intervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ autour de la limite et à partir du rang n_0, tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.



Remarque 4.12. La définition 4.10 peut se reformuler avec des quantificateurs comme nous le verrons en MTA (hors programme) :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 4.13 (unicité de la limite - admis)

Si une suite réelle converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Proposition 4.14

Toute suite réelle convergente est bornée.

47 *Application directe.* Démontrer que la réciproque de la proposition 4.14 est fausse.

I.2.2 Limites infinies

Définition 4.15. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **tend vers** $+\infty$ si quel que soit le réel M (aussi grand que l'on veut), à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus grands que M.

Remarque 4.16. En terme de quantificateurs, la définition précédente se traduit par :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M.$$

48 *Application directe.* Démontrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 2n + 3$ tend vers $+\infty$.

Définition 4.17. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **tend vers** $-\infty$ si quel que soit le réel m (aussi petit que l'on veut), à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus petits que m.

Remarque 4.18. En terme de quantificateurs :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant m.$$

I.3 Opérations sur les limites

I.3.1 Limite d'une somme

Le tableau ci-dessous résume les résultats concernant la limite d'une somme de deux suites convergentes.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Remarque 4.19. Il se peut que $(u_n + v_n)_n$ admette une limite alors que ni $(u_n)_n$ ni $(v_n)_n$ n'admettent de limite.

49 *Application directe.* Dans le cas de la forme indéterminée «$+\infty - \infty$» du tableau ci-dessus, donner des exemples donnant comme résultats : 0, $-\infty$, $+\infty$ et 42.

I.3.2 Limite d'un produit

Le tableau ci-dessous résume les résultats concernant la limite d'une somme de deux suites convergentes.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$?$

Remarque 4.20. Dans la troisième ligne du tableau, le signe de la limite est à déterminer en fonction des signes des limites de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$: ce sont les règles usuelles sur les nombres réels qui s'appliquent.

50 *Application directe.* Dans le cas de la forme indéterminée «$0 \times \infty$» du tableau ci-dessus, donner des exemples donnant comme résultats : 0, $-\infty$, $+\infty$ et $\sqrt{2}$.

I.3.3 Limite de l'inverse

Le tableau ci-dessous résume les résultats concernant la limite de l'inverse d'une suite convergente. On suppose ici que $(u_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang.

$\lim u_n$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque 4.21. Dire que $\lim u_n = 0^+$ (respectivement O^-) signifie que la suite converge vers 0 par valeurs positives (respectivement négatives), c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang toutes les valeurs de la suites sont positives (respectivement négatives).

Attention. Si $(u_n)_n$ tend vers 0 alors il se peut que son inverse n'ait pas de limite. En effet, la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \times (-1)^n}$ tend vers 0 mais $n \times (-1)^n$ n'a pas de limite.

II Suites arithmétiques et géométriques

II.1 Suites arithmétiques

Définition 4.22. On appelle suite **arithmétique** toute suite dont le terme général u_n vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r,$$

où $r \in \mathbb{R}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et est appelé **raison** de la suite.

Proposition 4.23

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

51 Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison 2, de premier terme $u_0 = -4$ et $N \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des N premiers termes de la suite.

Méthode. Pour vérifier si une suite $(u_n)_n$ est arithmétique, on se fixe $n \in \mathbb{N}$ et on simplifie l'expression de $u_{n+1} - u_n$. Si on obtient un nombre réel qui ne dépend pas de n alors la suite est arithmétique, sinon ce n'est pas le cas.

52 *Application directe.* Déterminer si les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies ci-dessous sont arithmétiques :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = 3 - 2n \\ v_n = n^2 + n + 1 \end{cases}$$

Remarque 4.24. Une suite arithmétique admet toujours une limite. Pour la déterminer, il suffit de donner l'expression de la suite.

53 *Application directe.* Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 17. Déterminer la limite de la suite.

54 *Application directe.* Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique. Sachant que $u_4 = 2$ et que $u_7 = 7$, déterminer le premier terme et la raison de la suite.

55 Démontrer qu'une suite arithmétique est soit strictement croissante, soit strictement décroissante, soit constante.

II.2 Suites géométriques

Définition 4.25. On appelle suite **géométrique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n,$$

où $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et appelé **raison** de la suite.

Remarque 4.26. Dans le cas où $q = 1$ il s'agit d'une suite constante (donc arithmétique de raison 0). On suppose que q est différent de 1 dans la définition pour des raisons pratiques qui apparaîtront par la suite.

Proposition 4.27

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, q^n.$$

Méthode. Pour vérifier si une suite $(u_n)_n$ est géométrique, on se fixe $n \in \mathbb{N}$ et on simplifie l'expression de u_{n+1} en essayant de faire apparaître u_n. Si on obtient quelque chose de la forme $q u_n$ alors la suite est géométrique de raison q.

Attention. Pour étudier le caractère géométrique d'une suite $(u_n)_n$, on évitera autant que possible de simplifier le ratio u_{n+1}/u_n, à moins d'avoir démontré au préalable que la suite ne s'annule pas.

56 Soient $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $1/2$, de premier terme 1 et $N \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des N premiers termes de la suite.

57 Déterminer le premier terme et la raison de la suite géométrique $(u_n)_n$ vérifiant $u_2 = 2$ et $u_5 = 54$.

III Théorèmes de convergence et applications

III.1 Théorèmes de convergence

Théorème 4.28 (de comparaison)

Soients $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que pour n suffisamment grand on ait $u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

(ii) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

(iii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.

Attention. Le premier point du théorème de comparaison n'est plus vrai en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte.

58 Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ayant la même limite telles que pour tout n, $u_n < v_n$.

59 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^3 + \sqrt{n^2 - n + 2} + 12.$$

Théorème 4.29 (des gendarmes)

Soients $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(u_n)_n$ trois suites réelles vérifiant à partir d'un certain rang :

(i) $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$,

(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \ell$.

Alors, $u_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

60 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{n + \sin(n)}.$$

Corollaire 4.30

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et ℓ un nombre réel tels que

(i) à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors, $u_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

61 Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Théorème 4.31 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée. Alors, $(u_n)_n$ converge.

62 Démontrer que la réciproque est fausse.

Corollaire 4.32

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante et minorée. Alors, $(u_n)_n$ converge.

Démonstration. Il suffit de considérer la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = -u_n$ puis d'appliquer le théorème précédent. □

63 *Pour approfondir.* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k! \geqslant 2^{k-1}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème 4.33 (croissantes comparées)

Soient $\alpha > 0$ et $a > 1$. Alors :

(i) $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; (ii) $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; (iii) $\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque 4.34. Pour simplifier, on écrit parfois ces résultats de croissances comparées de la façon suivante :

$$\ln(n) \ll n \ll n^2 \ll \mathrm{e}^n \ll n!.$$

64 Déterminer les limites éventuelles des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3^n + 1}{5n - n^2}, \quad v_n = \frac{2^n + 3^n}{n! + n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1 + \sin(n)}{n}.$$

III.2 Application aux suites géométriques

Proposition 4.35

Soit $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. Alors :

(i) $-1 < q < 1 \implies \lim q^n = 0$

(ii) $q > 1 \implies \lim q^n = +\infty$

(iii) Si $q \leqslant 1$ alors q^n n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Lemme 4.36. Soit $a > 0$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$

65 *Application directe.* Déterminer la limite éventuelle de la suite géométrique de premier terme -2 et de raison $1/3$.

66 *Application directe.* Déterminer la limite éventuelle de la suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison 3.

67 Déterminer la limite éventuelle de la suite géométrique dont le troisième terme est -3 et le sixième terme est $1/2$.

IV Suites et fonctions

Propriété 4.37. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$. Si f est croissante (resp. décroissante), alors $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration. Exercice. □

Propriété 4.38

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Si $u_0 \leqslant u_1$ (resp. $u_0 \geqslant u_1$), alors $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).

68 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessous est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

2. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

V Algorithmique

V.1 Représentation graphique d'une suite

Pour tracer un nuage de points avec la librairie `matplotlib` on ajoutera le paramètre `'o'` à la commande `plot`. Le code ci-dessous trace en rouge l'évolution de la suite de terme général $\sin(n)/n$ entre 1 et 29.

```python
import matplotlib.pyplot as p
import numpy as np

n = np.arange(1,30,1)
un = np.sin(n)/n

p.plot(n, un, 'o', color="red", markersize=2)
p.show()
```

On pourra jouer avec le paramètre `matplotlib` qui permet de régler la taille des points sur le graphe.

V.2 Approximation d'une limite

Lorsque l'on connaît la *vitesse de convergence* d'une suite, ou que l'on peut estimer la distance entre une suite et sa limite, il est possible de donner une apprximation numérique de sa limite.

69 *Python.* Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 \times \left(\frac{(-1)^0}{2 \times 0 + 1} + \frac{(-1)^1}{2 \times 1 + 1} + \frac{(-1)^2}{2 \times 2 + 1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2 \times n + 1} \right)$$

On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, |u_n - \pi| \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

1. Démontrer que la suite converge et donner sa limite.
2. Étant donné $\varepsilon > 0$, déterminer un entier n_0 à partir duquel $|u_n - \pi| \leqslant \varepsilon$.
3. En déduire un algorithme donnant une approximation de π à 10^{-p} près, où p est un paramètre.

70 *Python.* On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right). \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement cette suite.
2. Vérifier graphiquement que la suite converge vers $\sqrt{2}$ (on admettra ce résultat pour la question suivante).
3. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n_0 à partir duquel la suite est proche de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près. On admettra que la suite est décroissante à partir de son deuxième terme.

V.2.1 Pour aller plus loin

71 *Python.* On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

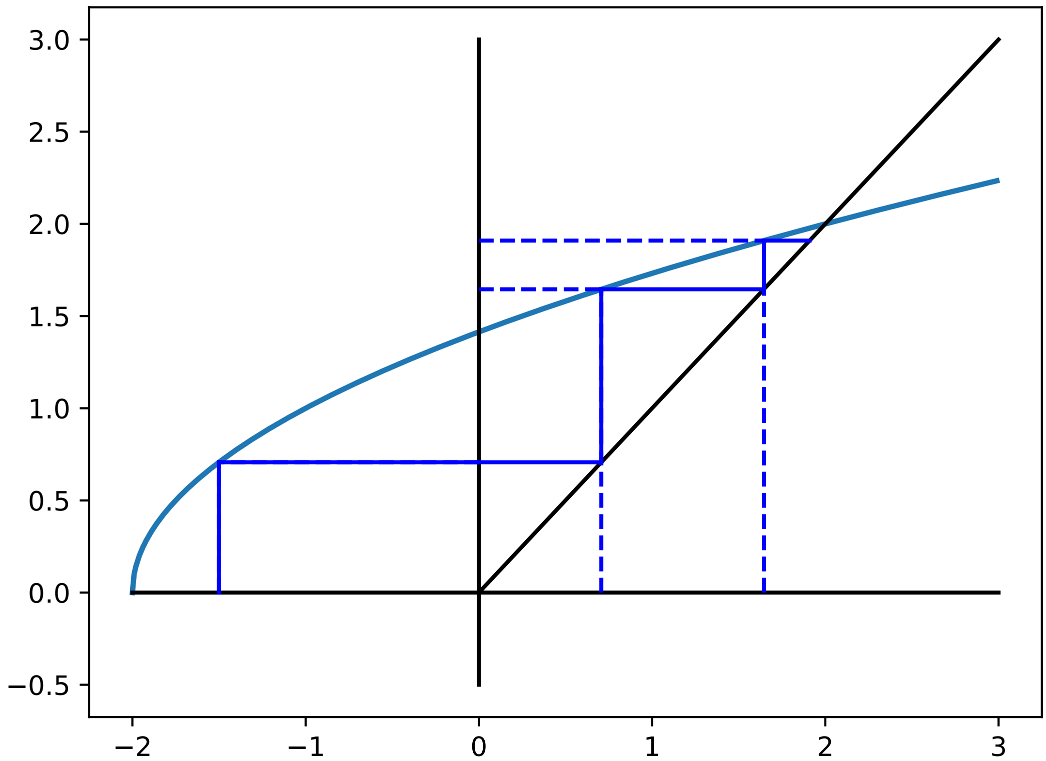
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n^2 + n) \times \sqrt{n}$$

1. Démontrer que cette suite est croissante et diverge vers $+\infty$.
2. Écrire un algorithme prenant en argument un nombre réel A et déterminant le rang à partir duquel la suite dépasse le seuil A.

72 *Python.* On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1/2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1. Représenter la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ sur $[-2, 3]$.
2. Écrire une fonction prenant en argument n et u_n et illustrant graphiquement le passage de u_n à u_{n+1}.
3. À l'aide des deux questions précédentes, obtenir un dessin similaire à celui-ci (on pourra l'améliorer en ajoutant une légende ou encore en annotant les axes) :



Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- détermina la mesure principale d'un angle,
- calculer un cosinus, un sinus, à l'aide des formules usuelles,
- simplifier une expression faisant intervenir un cosinus, un sinus, une tangente,
- résoudre des (in)équations trigonométriques.

I Radians et cercle trigonométrique

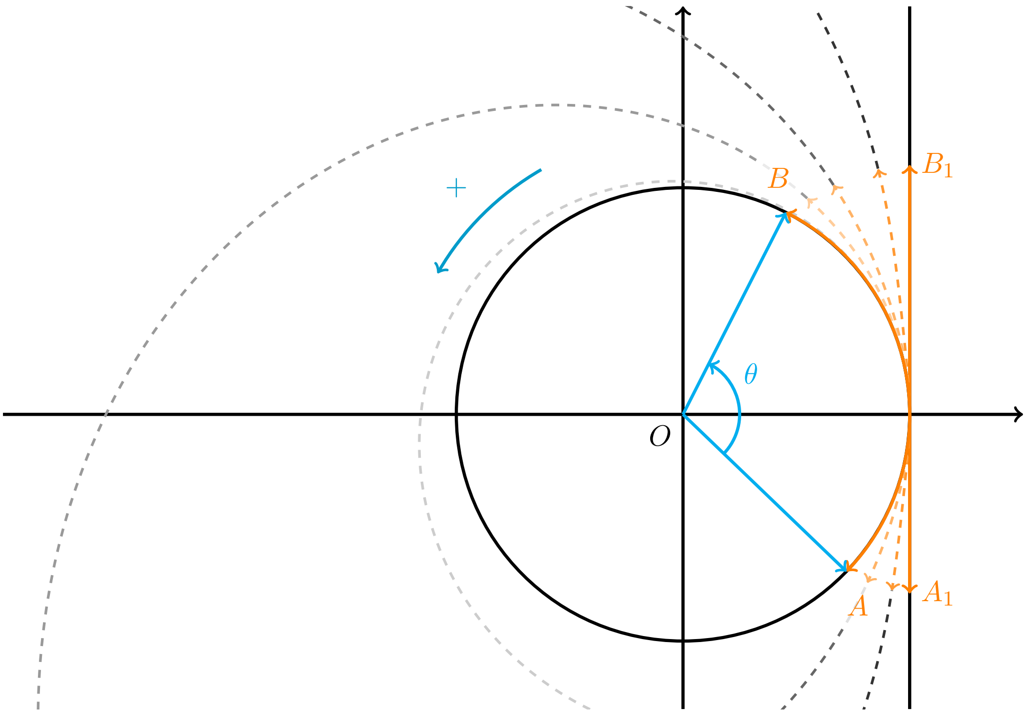
I.1 Premières définitions

Définition 5.1. Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan euclidien. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré sur l'origine. On le notera $\mathscr{C}$ dans tout le chapitre.

Définition 5.2. Étant donnés deux points A et B sur le cercle trigonométrique, on appelle **longueur de l'arc orienté** $\overset{\frown}{AB}$ la longueur de tout parcours sur le cercle partant de A et arrivant à B. Une telle longueur est comptée positivement lorsque le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique direct et négativement dans le cas contraire.

Définition 5.3. Soient A et B deux points du cercle trigonométrique. On appelle **mesure de l'angle** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ toute longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

Illustration 5.4. La droite d'équation $x = 1$ s'enroule sur le cercle trigonométrique, permettant de représenter les longueurs d'arc. Sur le dessin ci-dessous, l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ a pour mesure (entre autres) la longueur algébrique A_1B_1. Une autre mesure serait par exemple A_2B_1 où A_2 serait situé «2π plus bas» que A_1.



Remarque 5.5. Deux mesures d'un même angle différent par un multiple de 2π.

Définition 5.6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $r \in \mathbb{R}$. On dit que a et b sont **congrus** (ou égaux) **modulo** r et on note $a \equiv b\,[r]$ lorsque :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad a = b + kr.$$

Notation 5.7. Si θ est **une** mesure de l'angle entre deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on notera :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Définition 5.8. On appelle mesure principale d'un angle l'unique mesure de cet angle comprise dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

73 Déterminer la mesure principale de l'angle dont une mesure est $24\pi/5$.

Remarque 5.9.

II Fonctions trigonométriques usuelles

II.1 Définitions et premières propriétés

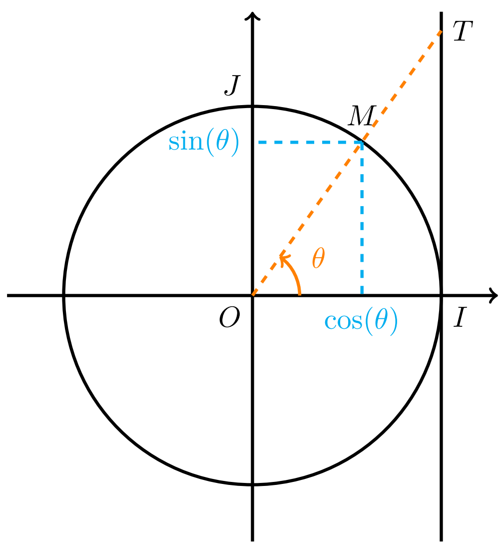
Définition 5.10. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$.
- Le **cosinus** de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus** de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point M (cf illustration 5.13).

Définition 5.11. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La **tangente** de θ est le nombre réel :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Propriété 5.12. Si on note T le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$, alors T a pour ordonnée $\tan\theta$.

Illustration 5.13.



Propriété 5.14

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Propriétés 5.15. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$;

(ii) $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$;

(iii) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$;

(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$;

(v) $\cos(-\theta) = \cos\theta$;

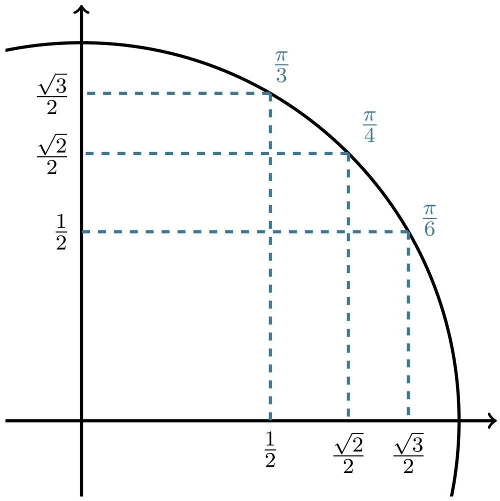
(vi) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$;

Remarque 5.16. Ces propriétés se retrouvent facilement en dessinant le cercle trigonométrique. Il n'est donc pas nécessaire de les connaître par cœur à condition d'être capable de les retrouver rapidement.

II.2 Valeurs remarquables

Le tableau ci-dessous résume les valeurs remarquables des fonctions circulaires sur $]0, \pi/2[$. Celles situées en-dehors de cet intervalle se retrouvent facilement en dessinant le cercle trigonométrique.

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



II.3 Formules usuelles

Proposition 5.17

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Remarque 5.18. Ces deux formules (à connaître par cœur) permettent de simplifier les expressions du type $\cos(a - b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(\theta + \pi)$, $\sin(\pi/2 - \theta)$, etc... Elles permettent aussi de retrouver les formules :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Exemple 5.19. On a :

$$\cos(\theta + \pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = -\cos\theta.$$

II.4 Dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème 5.20

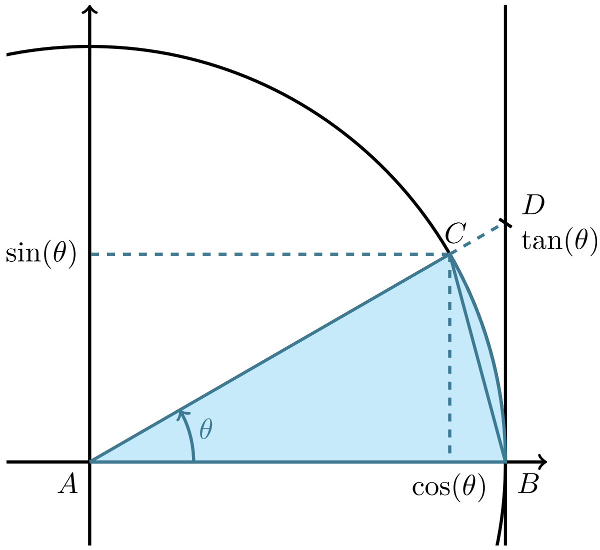
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Lemme 5.21. Soit θ un nombre réel non nul. Alors :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Démonstration. Nous démontrerons ce résultat en classe. Pour ce faire, nous utiliserons la figure ci-dessous.



□

Corollaire 5.22

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

74 Démontrer que la limite suivante existe et la déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

Propriété 5.23

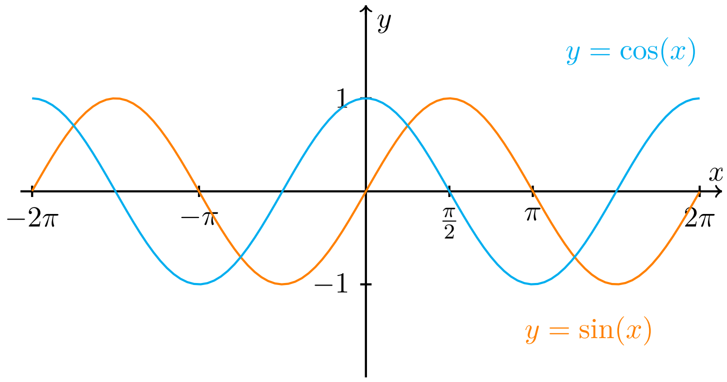
La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

II.5 Représentations graphiques

La fonction cosinus est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction sinus est quant à elle impaire. Sa courbe représentative présente donc une symétrie par rapport à l'origine du repère.

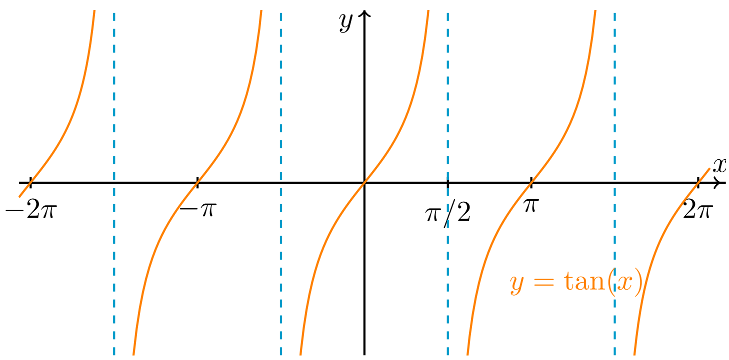
Illustration 5.24. Graphe des fonctions sinus et cosinus.



Propriété 5.25

La fonction tangente est π-périodique (c'est-à-dire que pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$) et impaire.

Illustration 5.26. Graphe de la fonction tangente.



III Résolution d'(in)équations trigonométriques

Remarque 5.27. Pour résoudre des (in)équations trigonométriques, nous prendrons toujours le temps de dessiner le cercle trigonométrique afin de ne pas oublier de solutions.

75 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

76 Résoudre l'inéquation en $x \in]-\pi, \pi]$ suivante : $|\sin(x)| \leqslant 1/2$.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- représenter un nombre complexe dans le plan complexe
- écrire un nombre complexe sous forme algébrique
- écrire un nombre complexe sous forme trigonométrique
- calculer le module d'un nombre complexe

I Définition et premières propriétés

Définition 6.1. On appelle **ensemble des nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall \left((a,b),(a',b')\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} (a,b)+(a',b') = (a+a', b+b') \\ (a,b)\times(a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b) \end{cases}$$

Notation 6.2. On note i le nombre complexe $(0,1)$. Ainsi, tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a+ib$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Définitions 6.3. L'écriture $z = a+ib$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z. Les réels a et b sont appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Propriétés 6.4. Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$;

(ii) $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$.

Propriété 6.5. Le nombre complexe i vérifie $i^2=-1$

Théorème 6.6

Les opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{C}$ prolongent celles existantes sur $\mathbb{R}$ en conservant leurs propriétés (distributivité, commutativité, etc...).

Remarque 6.7. En particulier, le théorème précédant implique que pour tout $(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3$:

1. $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$
2. $z_1 - z_1 = 0$
3. $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$
4. $z_1z_2 = z_2z_1$

Propriété 6.8. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $(a,b)\neq(0,0)$. Alors :

$$(a,b)\times\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1$$

Définition 6.9. On définit l'inverse d'un nombre complexe z non nul comme étant le nombre complexe :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2},$$

où l'écriture algébrique de z est $z = a+ib$.

Remarque 6.10. Ces définitions permettent de construire l'ensemble $\mathbb{C}$ de manière rigoureuse et de justifier que nous pouvons utiliser les propriétés dont nous avons l'habitude depuis la terminale.

Propriété 6.11. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times 0 = 0$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Propriété 6.12. Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

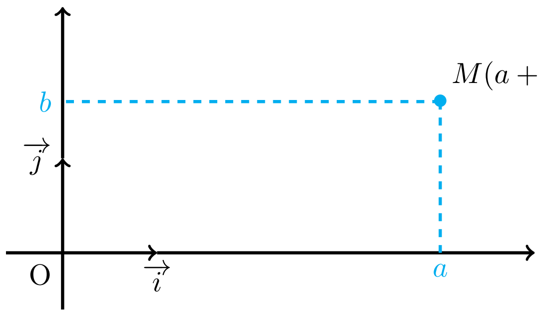
$$zz' = 0 \iff \big(z = 0 \text{ ou } z' = 0\big)$$

I.1 Représentation géométrique des nombres complexes

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

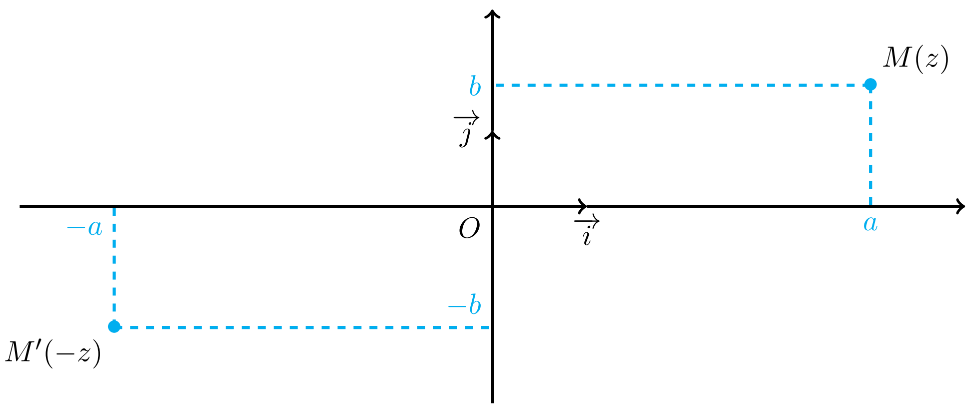
Définition 6.13. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **point d'affixe** z le point M de coordonnées (a, b), où $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On note souvent $M(z)$.

Illustration 6.14.



Propriété 6.15. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

Illustration 6.16.

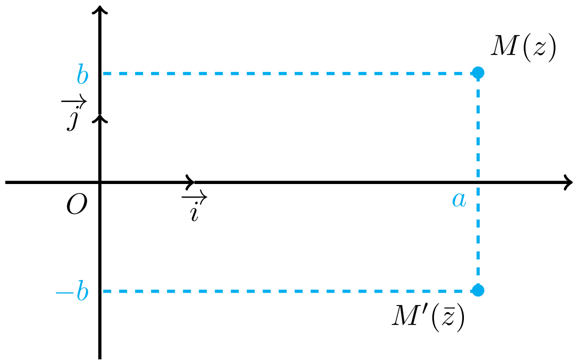


II Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6.17. Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $a - ib$.

Propriété 6.18. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Illustration 6.19.



Proposition 6.20

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(ii) $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;

(iii) Si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;

(iv) $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Exercice. □

II.1 Module d'un nombre complexe

Définition 6.21. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque 6.22. Soit M le point d'affixe z. Alors, $|z|$ correspond à la longueur OM.

Propriété 6.23

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration. Exercice. □

Propriété 6.24. Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Proposition 6.25

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $|zz'| = |z||z'|$;

(ii) $|z| = |\overline{z}|$;

(iii) Si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;

(iv) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(v) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. Les points (i) à (iv) sont laissés à titre d'exercice. Le point (v) est admis. □

III Exponentielle imaginaire

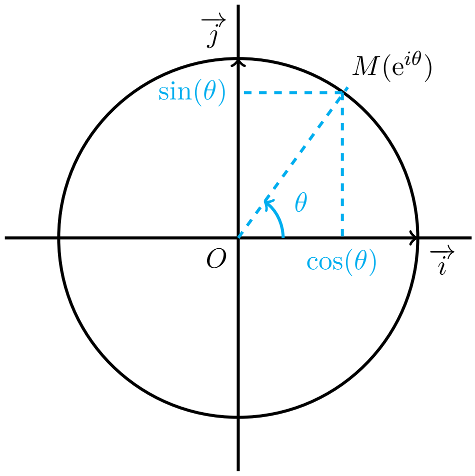
Définition 6.26. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque 6.27. Le point d'affixe $e^{i\theta}$ se situe sur le cercle unité. Rappelons que le cercle unité est l'ensemble des points situés à une distance 1 de l'origine. Or, si M est d'affixe $e^{i\theta}$ alors :

$$OM = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

Illustration 6.28.



Exemples 6.29. $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/6} = \sqrt{3}/2 - i/2$.

Proposition 6.30

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.31

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Proposition 6.32

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 6.33 (Formule de Moivre)

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \mathrm{e}^{ik\theta}.$$

Remarque 6.34. Attention ! Cette formule n'est valable que pour $k \in \mathbb{Z}$. En effet, pour $k = \frac{1}{2}$ et $\theta = 2\pi$, on a $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k \neq \mathrm{e}^{ik\theta}$ puisque :
$$\begin{cases} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \left(\mathrm{e}^{i2\pi}\right)^{1/2} = 1 \\ \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1. \end{cases}$$

IV Argument d'un nombre complexe

Théorème 6.35

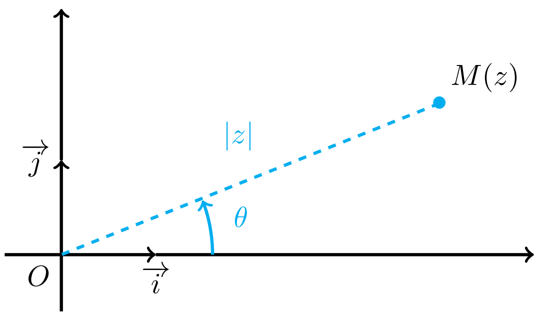
Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe un réel θ unique à 2π près tel que :
$$\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Démonstration. Admis. □

Définition 6.36. Tout réel θ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ est appelé **argument** de z et on note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque 6.37. Le théorème 6.35 signifie que si θ est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels θ' qui s'écrivent $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$.

Illustration 6.38. Si M est le point d'affixe z, alors $\arg(z) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$.



Exemple 6.39. $\arg(-1) \equiv \arg(\mathrm{e}^{i\pi}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

Exemple 6.40. Déterminons un argument du nombre complexe $z = 1 + i$. On a :
$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Donc :
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Ainsi :
$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Remarque 6.41. Attention ! L'argument du complexe $z = -\mathrm{e}^{i\pi/2}$ **n'est pas** $\pi/2$. En effet :

$$-\mathrm{e}^{i\pi/2} = \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi/2} = \mathrm{e}^{i(\pi+\pi/2)} = \mathrm{e}^{i3\pi/2}, \quad \arg\left(-\mathrm{e}^{i\pi/2}\right) \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi].$$

77 Déterminer $\arg(1 + i\sqrt{3})$.

Définition 6.42. Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et θ un argument de z. Posons $r = |z|$. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** (ou **forme polaire**) de z.

Exemple 6.43. En reprenant les calculs effectués à l'exemple 6.40, on obtient :

$$1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

78 Écrire $1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

Proposition 6.44

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. Alors :

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
(ii) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
(iii) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;
(iv) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
(v) $\forall k \in \mathbb{Z}, \arg(z^k) \equiv k \arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration. Les deux premiers points seront démontrés en classe. Les autres sont laissés à titre d'exercice. □

Proposition 6.45

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. Alors :

(i) $\arg(z) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
(ii) $z = z' \Leftrightarrow \big(|z| = |z'| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]\big)$.

Proposition 6.46

Soient A, B, C et D quatre points 2 à 2 distincts et d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

$$\arg(z_B - z_A) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})\ [2\pi]$$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- déterminer le sens de variation d'une fonction
- déterminer les maxima et minima d'une fonction
- dresser un tableau de variations d'une fonction
- appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

I Limite d'une fonction

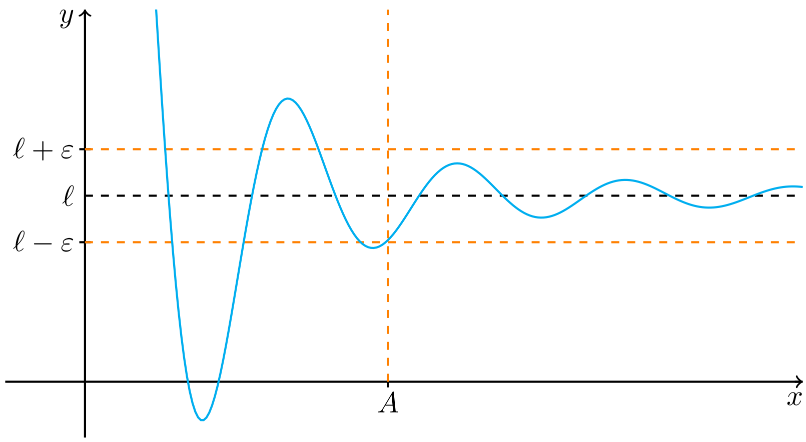
I.1 Limite à l'infini

Dans toute cette section, on considère un réel a ainsi qu'une fonction f définie sur $]a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 7.1. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{\to} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = \ell.$$

Illustration 7.2. Sur le dessin ci-dessous, on a choisi un intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ autour de la limite. À partir de $x = A$, toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans cet intervalle.



Remarque 7.3. La définition 7.1 peut se reformuler avec des quantificateurs comme nous le verrons en MTA (hors programme) par :

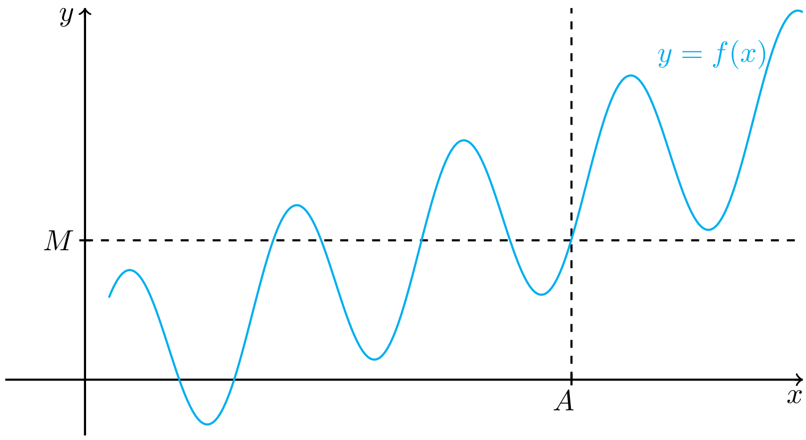
$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant A,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 7.4. On définit de manière analogue une limite finie d'une fonction en $-\infty$.

Définition 7.5. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.
On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{\to} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Illustration 7.6. Quel que soit le réel M, les $f(x)$ sont tous plus grands que M lorsque x est suffisamment grand.



Remarque 7.7. La définition 7.5 se traduit en terme de quantificateurs comme nous le verrons en MTA (hors programme) par :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in I,\ \forall x \geqslant A,\ \ f(x) \geqslant M.$$

Remarque 7.8. On définit de manière analogue une limite de $-\infty$ en $\pm\infty$.

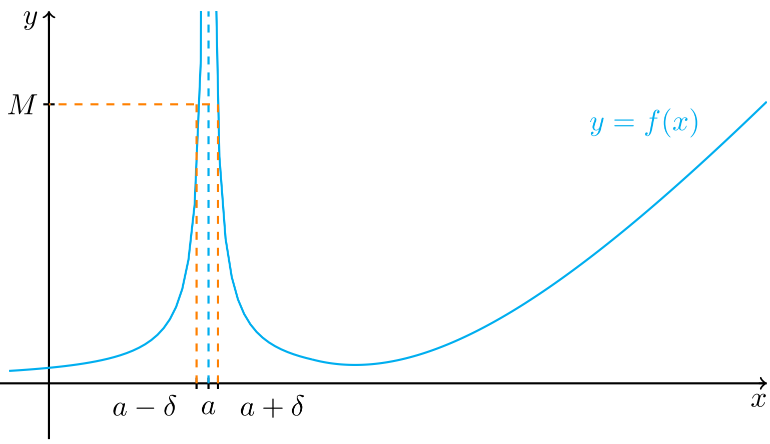
I.2 Limite en un point

Dans toute cette section, on considère un réel a, un réel positif h ainsi qu'une fonction f définie sur $]a-h, a[$ ou $]a, a+h[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 7.9. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle de la forme $[M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a. On note alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0}{\to} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty.$$

Illustration 7.10. Sur le dessin ci-dessous, on a représenté une fonction f de limite $+\infty$ en a. Quel que soit le réel M, $f(x)$ dépasse M pour tout x suffisamment proche de a (ici pour tout x dans l'intervalle $]a-\delta, a+\delta[$.



Remarque 7.11. La définition 7.9 se traduit en terme de quantificateurs comme nous le verrons en MTA (hors programme) par :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M\Big).$$

Remarque 7.12. On définit de manière analogue une limite égale à $\pm\infty$ **à droite** et **à gauche** de a.

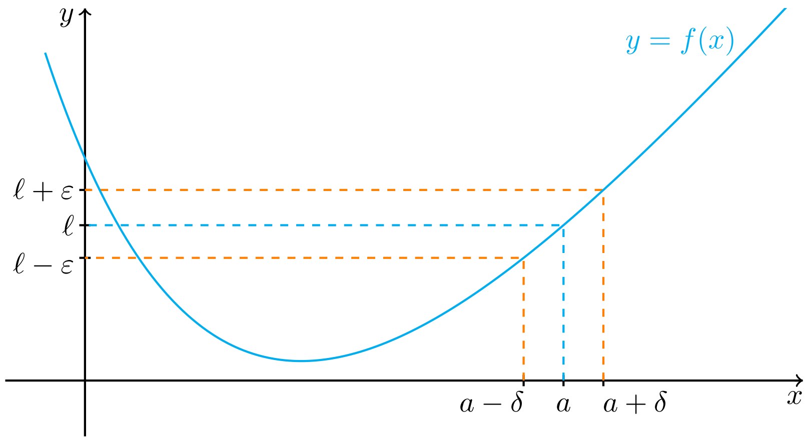
Exemple 7.13. La fonction inverse n'a pas la même limite à gauche et à droite de 0. Notons-la f, elle vérifie :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Définition 7.14. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0}{\to} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = \ell.$$

Illustration 7.15. Quelle que soit la précision ε, pour x suffisamment proche de a, $f(x)$ est proche de ℓ à ε près.



Remarque 7.16. La définition 7.14 se traduit à l'aide de quantificateurs comme nous le verrons en MTA (hors programme) par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Proposition 7.17 (unicité de la limite)

Si une fonction admet une limite en un point (ou en l'infini), alors cette limite est unique.

I.3 Opérations sur les limites

Les résultats énoncés dans cette section sont les mêmes que ceux énoncés dans le chapitre sur les suites. La seule nuance est qu'ils s'appliquent en $\pm\infty$ ainsi qu'en un point a réel.

I.3.1 Limite d'une somme

Le tableau ci-dessous résume les résultats concernant la limite d'une somme de deux fonctions.

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Remarque 7.18. Il se peut que $f+g$ admette une limite alors que ni f ni g n'admettent de limite.

79 *Application directe.* Dans le cas de la forme indéterminée «$+\infty-\infty$» du tableau ci-dessus, donner des exemples donnant comme résultats : 0, $-\infty$, $+\infty$ et 403.

I.3.2 Limite d'un produit

Le tableau ci-dessous résume les résultats concernant la limite d'une somme.

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f\times g)$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?

Remarque 7.19. Dans la troisième ligne du tableau, le signe de la fonction est à déterminer en fonction des signes des limites de f et de g : ce sont les règles usuelles sur les nombres réels qui s'appliquent.

80 *Application directe.* Dans le cas de la forme indéterminée «$0\times\infty$» du tableau ci-dessus, donner des exemples donnant comme résultats : 0, $-\infty$, $+\infty$ et 21.

I.3.3 Limite de l'inverse

Le tableau ci-dessous résume les résultats concernant la limite de l'inverse. On suppose ici que f est non nulle «au voisinage du point d'intérêt»

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque 7.20. Dire que $\lim f = 0^+$ (respectivement 0^-) signifie que la fonction converge vers 0 par valeurs positives (respectivement négatives), c'est-à-dire que pour x suffisamment proche du point d'intérêt, les valeurs de la fonction sont positives (respectivement négatives).

Attention. Si f tend vers 0 alors il se peut que son inverse n'ait pas de limite.

81 Donner une fonction démontrant ce résultat.

I.3.4 Limite d'une composée

Théorème 7.21 (Admis)

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. Soient $f\colon I\to J$ et $g\colon J\to\mathbb{R}$. Soient encore $y_0\in\mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$ et $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$. Alors :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0,\\ \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \ell.\end{cases} \implies \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = \ell.$$

82 Considérons :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-2}} \end{array}$$

Déterminer la limite éventuelle de φ en 1.

I.4 Limites et comparaison

Théorème 7.22 (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. On suppose que, au voisinage de x_0, $f \leqslant g$.

(i) Si f et g admettent des limites finies en x_0, alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$;

(ii) Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$;

(iii) Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

83 Étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction f définie ci-dessous :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 + \sin(2x-1) \end{array}$$

Théorème 7.23 (des gendarmes)

Soient f, u et v trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. Si :

(i) au voisinage de x_0, $u \leqslant f \leqslant v$,

(ii) $\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,

alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

84 Étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction f définie ci-dessous :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$$

II Continuité d'une fonction

II.1 Définitions

Dans cette section, f représente une fonction réelle et a un point dans l'ensemble de définition de f.

Définition 7.24. On dit que f est **continue** en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de I.

Remarque 7.25. On dit souvent qu'une fonction est continue lorsqu'on peut tracer son graphe sans lever le stylo. Attention cependant : on ne peut pas tracer de trait vertical lorsqu'on représente une fonction (cela signifierait qu'elle aurait plusieurs valeurs en un même point).

Propriété 7.26. Les fonctions usuelles (polynômes, puissances, exponentielles, logarithme, cosinus, sinus, etc ...) sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.

II.2 Propriétés

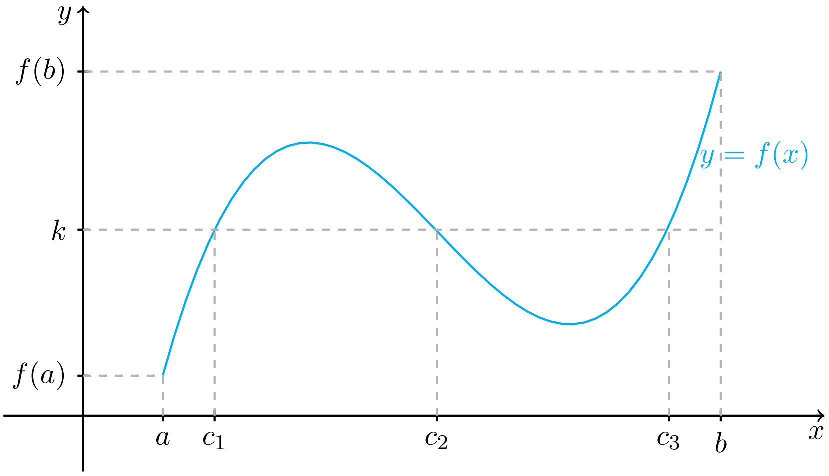
Théorème 7.27 (des valeurs intermédiaires)

Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :

$$\exists c \in [a,b], \quad f(c) = k.$$

Remarque 7.28. Ce résultat signifie que f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.

Illustration 7.29. La fonction f peut prendre plusieurs fois la valeur k sur l'intervalle $[a,b]$.



85 Démontrer que le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai lorsque f n'est pas continue.

Théorème 7.30 (de la bijection)

Dans les conditions du théorème des valeurs intermédiaires, si l'on suppose en plus que f est strictement monotone, alors le réel c est unique :

$$\exists! c \in [a,b], \quad f(c) = k.$$

86 Démontrer que si l'on suppose uniquement f monotone alors le théorème de la bijection est faux.

87 Démontrer que l'équation $\ln(2x+1) + \sin(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.

III Dérivée d'une fonction

Dans tout ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On notera encore f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et on se placera dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

III.1 Définitions

Définition 7.31. On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si la limite suivante existe et est finie :

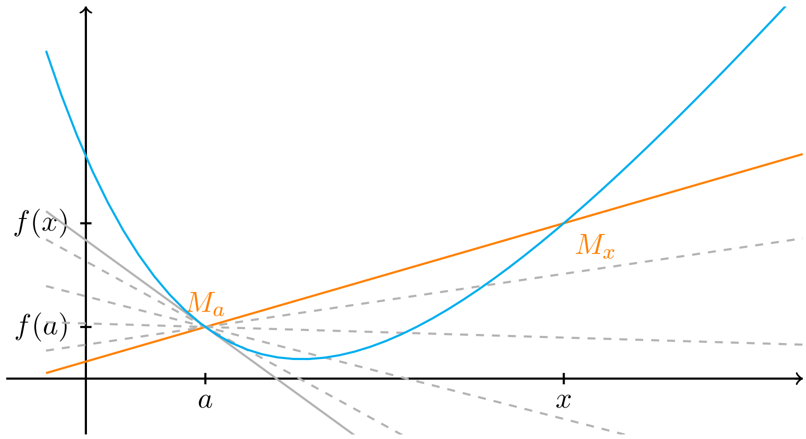
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On appelle alors cette limite **nombre dérivé de f en** a et on la note $f'(a)$ (ou parfois $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)(a)$).

Illustration 7.32. Le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $M_a = (a, f(a))$ et $M_x = (x, f(x))$.



Définition 7.33. On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On note alors f' l'application définie par $f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$

III.2 Premières propriétés

Proposition 7.34

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention. La réciproque est fausse ! Penser à la fonction valeur absolue par exemple.

Remarque 7.35. Les fonctions usuelles (trigonométriques, polynomiales, fractions rationnelles, exponentielles, logarithmes) sont dérivables sur leurs ensembles de définition. Attention cependant : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. La fonction valeur absolue non plus.

88 Étudier la dérivabilité éventuelle de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{array}$ sur son ensemble de définition.

III.3 Dérivées usuelles

Proposition 7.36

(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^\star$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \cap]-\infty; 0[$, sur $]0; +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et : $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) Les fonctions ln, exp, cos, sin et tan sont dérivables sur leurs ensembles de définition et :
- $\forall x \in]0; +\infty[,\ \ln'(x) = 1/x$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

III.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 7.37

Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\lambda f + g$ est dérivable et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$,

(ii) fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$,

(iii) si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Théorème 7.38

Soient $u \colon I \to J$ et $f \colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors, $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x)).$$

III.5 Variations des fonctions dérivables

Définitions 7.39. On rappelle que :
- f est **croissante** sur I si : $\quad \forall (x, y) \in I^2,\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$,
- f est **strictement décroissante** sur I si : $\quad \forall (x, y) \in I^2,\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.

Théorème 7.40

Supposons f dérivable sur I. Alors :

(i) $f' = 0$ si et seulement si f est constante,

(ii) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante sur I,

(iii) si $f' > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

89 Soit :

$$\begin{array}{rcl} f : &]-2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{-x^3}{x+2} \end{array}$$

1. Déterminer les limites éventuelles de f en -2 et en $+\infty$
2. Déterminer la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variations de f
4. Démontrer que l'équation $(E)\ :\ f(x) = 2$ admet une unique solution α puis que $-1,5 < \alpha < 0$.

90 **Première partie**

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} g : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1) \end{array}$$

1. Déterminer g'.
2. Démontrer que l'équation $(E) : g(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $[\sqrt{\mathrm{e}-1}, 2]$.
3. Dresser le tableau de variations de g.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)/x$ lorsque x tend vers 0.
2. En déduire que f est dérivable sur son ensemble de définition et préciser f'.
3. Démontrer que :
$$\forall x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln(2x^2)}{x}$$
4. En déduire la limite de f en $+\infty$
5. Dresser le tableau de variations de f.

I Installer Python

Si vous êtes sous Linux, python3 est déjà installé sur votre ordinateur. Si vous êtes sous Mac OS, alors python2 est installé : il est conseillé d'installer python3 en supplément. Enfin, si vous êtes sous Windows, vous n'avez *a priori* aucune version de python présente sur votre ordinateur.

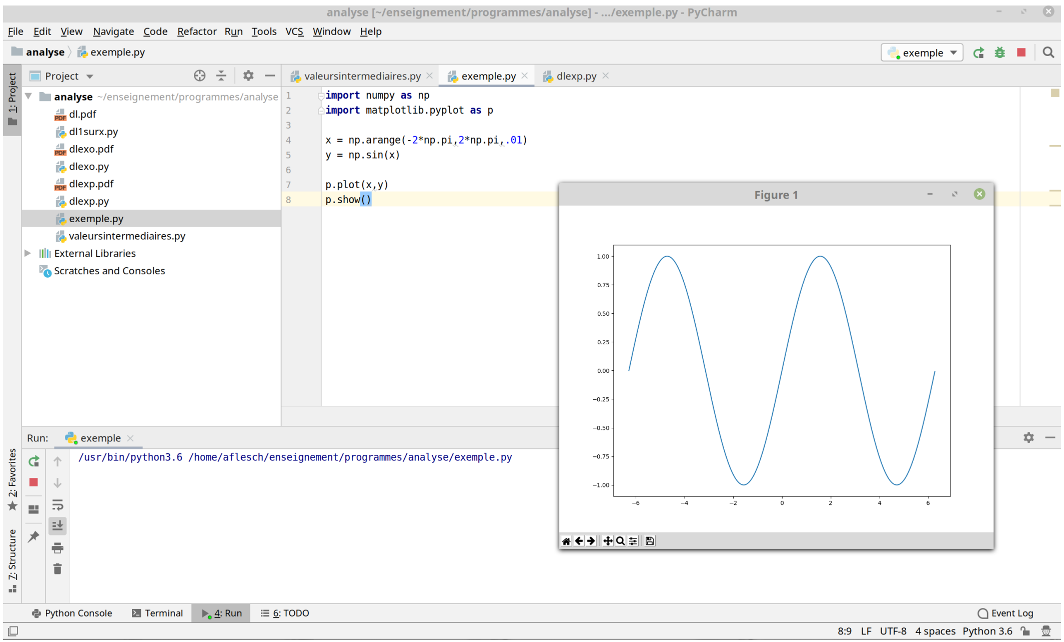
Dans tous les cas, deux possibilités s'offrent à vous suivant si vous avez déjà utilisé python (ou un autre langage de programmation) ou non :

- installer python3 ainsi qu'une interface de développement que vous connaissez (type edu-python, spyder, eclipse) voire un simple éditeur de texte,
- installer **pycharm** qui est un environnement de développement python complet : c'est celui que j'utiliserai en cours et que je vous conseille d'installer si vous n'avez jamais fait de python.

Si vous choisissez la première option, vous devrez vous débrouiller pour installer les modules numpy, matplotlib et scipy (ça ne devrait pas être trop compliqué, en particulier si vous êtes sous linux).

Pour installer pycharm, rendez-vous ici :
`https://www.jetbrains.com/pycharm/download`
Vous pourrez alors télécharger la version "community" et l'installer sur votre ordinateur, quel que soit la plateforme que vous utilisez (Linux, Mac Os ou Windows).

Ci-dessous, un aperçu de l'interface. Sur la gauche se trouve l'arborescence du dossier dans lequel est enregistré votre projet, sur la droite le code source et en bas tout un tas d'outils pour débugger vos programmes.



Pour pouvoir utiliser les modules scientifiques (numpy, matplotlib et sympy) présentés dans la suite de ce document, il est nécessaire de les installer. Pour ce faire, créez un projet, rendez-vous ensuite dans le menu File->Settings puis cliquez sur Project->Project interpreter et enfin cherchez l'icône "+" pour installer numpy, matplotlib et sympy.

II Prise en main de Python

II.1 Les bases

II.1.1 Affectation, listes et chaînes de caractères

Pour vous familiariser avec la synthaxe `Python`, essayez les commandes suivantes dans l'interpréteur :

```
>>> x = 3
>>> x = x + 1
>>> x
>>> y = "Bon"
>>> z = "jour"
>>> print(y+z)
>>> a = [4, 3, 6, 7]
>>> a[2]
```

II.1.2 L'instruction if (si, alors, sinon)

Le programme ci-dessous vérifie si un nombre x (qui a été défini auparavant) vaut 2 ou 3 et affiche un message en fonction du résultat :

```
if x==2:
    print("x vaut 2")
elif x==3:
    print("x vaut 3")
else:
    print("x est différent de 2 et de 3")
```

II.1.3 La boucle for (pour)

Voici un petit bout de code qui affiche la table des 5. Essayez de modifier le paramètre de la fonction `range` pour comprendre comment fonctionne cette dernière.

```
for i in range(10):
    print((i+1)*5)
```

II.1.4 La boucle while (tant que)

Voici une autre manière d'afficher la table des 5. Ici, l'utilisation de la boucle n'est pas pertinente puisqu'on aurait pu s'en sortir avec une boucle for !

```
i = 1
while i<11:
    print(i*5)
    i = i + 1
```

II.1.5 Définition d'une fonction

Voici une fonction qui prend en entrée un nombre et lui ajoute 1 :

```python
def f(x):
    return x+1
```

Une fonction peut avoir plusieurs paramètres, elle peut même avoir des paramètres optionnels (avec des valeurs par défaut). Il est conseillé de donner des noms explicites à vos fonctions et de les documenter lorsque cela est nécessaire afin que n'importe qui puisse comprendre ce qu'elles font facilement. Exemples :

```python
def ajoute(x,y):
    """Fonction qui calcule la somme de deux nombres"""
    return x+y

def incremente(x, increment=1)
    """Fonction qui incrémente un nombre x.
       On peut changer l'incrément qui par défaut vaut 1.
       incremente(2) : 3
       incremente(2, increment=4) : 6
    """
    return x+increment
```

II.2 Fonctionnalités avancées

II.2.1 Le module numpy

Le module numpy permet de faire du calcul scientifique en python. En particulier, il permet une manipulation avancée des tableaux, la génération de nombres pseudo-aléatoires, la résolution approchée d'équations, et bien d'autres choses encore. Nous l'utiliserons essentiellement en coordination avec le module matplotlib pour tracer des courbes. Pour vous familiariser avec ce module, vous pouvez essayer ces quelques commandes directement dans l'interpréteur :

```python
>>> import numpy as np
>>> x = np.arange(1,2,.1)
```

II.2.2 Le module matplotlib

Le module matplotlib permet de tracer des graphes de fonctions, des histogrammes, des lignes de niveau, le tout avec énormément d'options de personnalisation. On n'hésitera pas à s'inspirer des exemples présentés dans la gallerie du projet : `https://matplotlib.org/gallery.html`.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as p

x = np.arange(-2*np.pi,2*np.pi,.01)
y = np.sin(x)

p.plot(x,y)
p.show()
```

II.2.3 Le module sympy

Le module sympy permet de faire du calcul symbolique, c'est-à-dire de manipuler des expressions avec des variables. Il peut résoudre des équations, simplifier des expressions, il connaît les formules de trigonométrie, etc... Voici un exemple de code qui génère une équation du premier degré ($ax + b = 0$) avec des valeurs de a et b tirées aléatoirement à l'aide du module numpy et qui la résout :

```
import sympy as s
import numpy as np

x = s.symbols('x')

# Génère 2 nombres entiers aléatoirement entre 1 et 9
a = np.random.randint(1, 10)
b = np.random.randint(1, 10)

# Formatte l'équation ax+b=0 pour l'afficher par la suite
equation = str(a) + "x" + " + " + str(b) + " = 0"

# Résout l'équation ax+b=0 à l'aide du module sympy
sol = s.solvers.solve(a * x + b, x)

# Affiche le résultat du calcul
print("La solution de l'équation " + equation + " est : ")
print(sol[0])
```

III Un canevas prêt à l'emploi

Même si nous n'utiliserons pas toujours les modules `numpy`, `matplotlib` et `sympy`, leurs temps de chargement respectifs étant tout à fait raisonnable, vous pourrez si vous le souhaitez commencer tous vos programmes par ces quelques lignes :

```
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as p
import sympy as s

x, y, z, t = s.symbols('x y z t')
k, m, n = s.symbols('k m n', integer=True)
f, g, h = s.symbols('f g h', cls=s.Function)
```