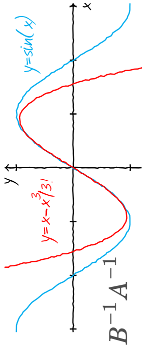
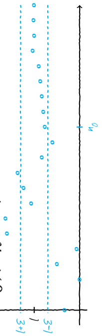


$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$



$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,|u_n-\ell|\leq\varepsilon$

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

$\zeta_k=|a|^{1/n}e^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$

1 S'exprimer en mathématiques

1 Soient P et Q deux assertions. Dresser la table de vérité des expressions suivantes :

1. non(P ou Q) $\Longleftrightarrow$ [non(P) et non(Q)].
2. $\Big[\big(\text{non}(P)\Longrightarrow Q\big)$ et non$(Q)\Big]\Longrightarrow P$.
3. $(P\Longrightarrow Q)$ ou (non $(P)\Longrightarrow Q)$.
4. $[P$ et $(P\Longrightarrow Q)]\Longrightarrow Q$.

2 Les phrases suivantes signifient-elles $A\Rightarrow B$ ou $B\Rightarrow A$?

1. Si A, alors B.
2. Pour que A, il faut que B.
3. Pour que A, il suffit que B.
4. A est une condition suffisante pour B.
5. A est une condition nécessaire pour B.
6. A dès que B.
7. A est faux si B l'est.
8. Sans A, on ne peut avoir B.

3 On considère les assertions ci-dessous :

(P_1) : $\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\ x+y>0$, $\qquad(P_4)$: $\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\ y^2>x$,

(P_2) : $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},\ x+y>0$, $\qquad(P_5)$: $\forall x\geqslant0,\forall y\in\mathbb{R},xy\geqslant0$,

(P_3) : $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\ x+y>0$, $\qquad(P_6)$: $\forall x\geqslant0,\forall y\geqslant0,xy\geqslant0$,

1. Les assertions P_i sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.
2. Donner la négation de chacune.

4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction.

1. Traduire l'assertion «f est croissante» à l'aide de quantificateurs.
2. Écrire la négation de l'assertion précédente.
3. Démontrer alors que la fonction sinus n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

5 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. Traduire l'assertion «$(u_n)_n$ est bornée» à l'aide de quantificateurs.
2. Écrire la négation de l'assertion précédente.
3. Démontrer alors que la suite de terme général $u_n=(-1)^ne^n$ n'est pas bornée.

6 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les assertions :

P_1 : f ne s'annule jamais,
P_2 : f est impaire,
P_3 : f est périodique,
P_4 : f s'annule sur $[0,1]$,
P_5 : f est strictement décroissante.
P_6 : f passe exactement une fois par zéro.

Pour chacune de ces assertions :

1. la traduire en terme de quantificateurs,
2. donner sa négation,
3. donner un exemple de fonction satisfaisant l'assertion,
4. donner un exemple de fonction ne la satisfaisant pas.

7 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x\in I,f(x)\neq0$;
2. $\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in I,\ f(x)=y$,
3. $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in I,\ |f(x)|\leq M$,
4. $\forall x\in I,(f(x)>0\Longrightarrow x\leqslant0)$.
5. $\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in I,\ f(x)=y$.
6. $\exists z\in\mathbb{R},\forall x\in I,\ f(x)\neq z$.

8 On considère l'assertion (P) suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\left(x^2\geq5\Longrightarrow x\geq\sqrt{5}\right).$$

Écrire la négation de (P). (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

9 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On considère les assertions :

P_1 : (u_n) est croissante,

P_2 : (u_n) est bornée,

P_3 : (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang,

P_4 : (u_n) diverge vers $+\infty$,

P_5 : (u_n) ne prend que des valeurs paires,

P_6 : (u_n) prend toutes les valeurs paires.

Pour chacune de ces assertions :

1. la traduire en terme de quantificateurs,
2. donner sa négation,
3. donner un exemple de suite satisfaisant l'assertion,
4. donner un exemple de suite ne la satisfaisant pas.

10
1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b. On considère l'implication $(\star)$ suivante :

$$\big(\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi\big) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$

   (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?

   (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.

   (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.

   (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

11 Soit n un entier naturel. Démontrer que $n^2 + 3n$ est pair.

12 Démontrer que la somme de deux entiers de même parité est un nombre pair.

13 Soit n un entier naturel. Démontrer, par disjonction des cas, que $n^3 - n$ est divisible par 3. On pourra discuter selon la valeur du reste de la division euclidienne de n par 3.

14 Soit a un nombre réel vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon.$$

Démontrer que $a = 0$. On pourra écrire le résultat sous forme d'une implication et démontrer sa contraposée.

15 On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que f garde un signe constant si, et seulement si, $a = 0$.

16 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante : $\sqrt{6+x} = x$.

17 Déterminer en raisonnant par analyse-synthèse toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

18 On cherche à déterminer en raisonnant par analyse-synthèse toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe. Prouver que $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Conclure.

19 Soit $a > 0$ un réel fixé. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

20 Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *géométrique de raison* $q \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$. Démontrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

21 Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier. On pourra raisonner par contraposition.

22 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111 quel que soit $n\in\mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9\times 111+1$).

23 Pour $n\in\mathbb{N}$ on considère la propriété suivante :

$$P_n : \quad 2^n > n^2$$

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

24 Démontrer que $(1=2)\Rightarrow(2=3)$.

25 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x\in\mathbb{R}$ $x^2=4$ ...... $x=2$;
2. $z\in\mathbb{C}$ $z=\overline{z}$ ...... $z\in\mathbb{R}$;
3. $x\in\mathbb{R}$ $x=\pi$ ...... $e^{2ix}=1$.

26 Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

27 Écrire la négation des assertions suivantes où P,Q,R,S sont des propositions.

1. $P\Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R\Rightarrow S$).

28 On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q)\wedge P\Rightarrow \neg S$.
2. $S\Rightarrow(\neg P)\vee Q$.
3. $P\Rightarrow R\vee S$.
4. $S\wedge Q\Rightarrow\neg P$.
5. $R\wedge\neg(S\vee Q)\Rightarrow T$.
6. $R\Rightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

29 *« Si je dors, alors je rêve et je ne ronfle pas. Si je ne ronfle pas, alors je parle. Je ne parle pas. »* Que peut-on en déduire ?

- ☐ Je ronfle.
- ☐ Je ne ronfle pas.
- ☐ Je ne dors pas.
- ☐ Je ne rêve pas.
- ☐ Je dors et je ronfle.
- ☐ Je ne rêve pas et je ne dors pas.

30 Simplifier :

$$\frac{n!(k+1)!}{(n-2)!k!}.$$

31 ⋆ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ (où le symbole | signifie «divise») :

a) $6\mid 5n^3+n$

b) $7\mid 3^{2n+1}+2^{n+2}$

c) $5\mid 2^{2n+1}+3^{2n+1}$

d) $11\mid 3^{8n}\times 5^4+5^{6n}\times 7^3$

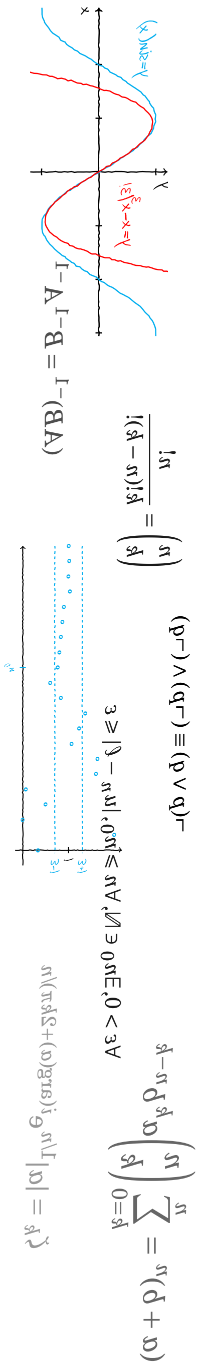
e) $9\mid 4^n-1-3n$

f) $15^2\mid 16^n-1-15n$

32 ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\exists m\in\mathbb{N}$ tel que $n=m^2$. En déduire que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

33 Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur :

$$\frac{2}{\sqrt{2}},\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}},\quad \frac{2}{1+\sqrt{2}},\quad \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$



34 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b le plus petit possible :

$$\sqrt{98},\quad 3\sqrt{44},\quad 2\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3},\quad 6\sqrt{12}\sqrt{3},\quad \left(2\sqrt{13}+7\sqrt{5}\right)\left(7\sqrt{5}-2\sqrt{13}\right)$$

35 Simplifier les expressions ci-dessous :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{2}\right)^8,\quad \left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{4}{3}\right)^6,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^8\times\left(\frac{4}{5}\right)^3,\quad \left(\frac{5}{6}\right)^4\times\left(\frac{4}{5}\right)^6.$$

36 Simplifier les expressions ci-dessous :

$$e^{3\ln(2)},\quad e^{\ln(2)/2},\quad e^{-\ln(4)},\quad \ln\left(e^{-2}\right),\quad \ln\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right).$$

37 Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Simplifier les écritures ci-dessous au maximum :

$$\left(\frac{a^3\cdot b^2\cdot b^{-1}}{a\cdot a^{-2}\cdot b^{1/2}}\right)^3,\quad \left(\frac{a\cdot b^2\cdot c^{-1/3}}{a\cdot b^{-2}\cdot\sqrt[3]{c^2}}\right)^{3/4},\quad \left(\frac{\sqrt[2]{a^3}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot c^{-1/2}}{a\cdot b^{-2}\cdot\sqrt[4]{c^2}}\right)^4$$

38 Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A=(e^x-1)^2-e^{2x}$
2. $B=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$
3. $C=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$

39 Simplifier les exressions suivantes :

$$\sqrt[24]{5^8},\quad \sqrt{12}\sqrt{3},\quad \sqrt[21]{3^7},\quad \sqrt[4]{\sqrt{3^6}},\quad \sqrt[7]{\sqrt{7^7}},\quad \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$$

40 Résoudre les équations de $x\in\mathbb{R}$ suivantes :

(E_1) : $3x\sqrt{2}-5=-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ $\qquad$ (E_3) : $-\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{3}=0$

(E_2) : $x\sqrt{3}-\sqrt{3}=1-x$

41 Simplifier au maximum :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{4,1}\times 9^{2,3},\quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3,2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1,1},\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{12,7}\times 2^{\pi}$$

42 Soit $x>0$ un nombre réel. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A=\ln(4)-\ln(\sqrt{2})$
2. $B=\ln(2x)-\ln(x)$
3. $C=\ln(x^2)-\ln(x)$
4. $D=\ln(x^2-1)-\ln(x-1)$

43 Soit $t\in\mathbb{R}$. Écrire les nombres ci-dessous sous la forme e^a où $a\in\mathbb{R}$ est à déterminer :

$$\left(3e^{5t}\right)^{-4},\quad \frac{2}{\left(e^2\right)^6},\quad \left(\frac{e^{2t+1}}{3e^{t-1}}\right)^{1,5}$$

44 Soit $t\in\mathbb{R}_+^\star$. Écrire les nombres ci-dessous sous la forme $\ln(a)$ où $a\in\mathbb{R}_+^\star$ est à déterminer :

$$-3\ln(3)-2\ln(7),\quad 2\ln(2)+2,\quad \frac{1}{2}\ln(t^2-1)+2\ln(1-t)$$

45 Démontrer les égalités suivantes :

$$\sqrt{4+\sqrt{12}}=1+\sqrt{3}\quad\text{et}\quad 2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

46 Sachant que $\sqrt{12}\simeq 3,46$ et que $\sqrt{120}\simeq 10,95$, donner une estimation de :

$$\sqrt{1200},\quad \sqrt{12000},\quad \sqrt{0,12},\quad \sqrt{0,012}$$

47 Démontrer l'égalité suivante :

$$\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$$

48 Résoudre les (in)équations de $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

(E_1) : $\ln(2-x) = 0$

(E_2) : $2\ln(x) + 6 = 1$

(E_3) : $\ln(2x+1) + \ln(x) = 0$

(E_4) : $\ln(-x) < 2$

(E_5) : $\ln(2-x) - 2\ln(x) = 0$

(E_6) : $\ln(\ln(x)) < 0$

(E_7) : $\ln(x+1) \cdot \ln(2-x) = 0$

(E_8) : $\ln(x) + \dfrac{1}{\ln(x^2)} = 3$

(E_9) : $\ln(x) + \ln(3x+2) > 0$

49 Résoudre les (in)équations de $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

(E_1) : $e^{2-x} - e^x = 0$

(E_2) : $e^{2x+3} = 1$

(E_3) : $e^{5-x^2} - e = 0$

(E_4) : $e^{-x} = 0$

(E_5) : $2e^{-x} = \dfrac{4}{e^x + 1}$

(E_6) : $e^{2x} + 3e^x = 2$

(E_7) : $e^x + \dfrac{1}{e^x} = 1$

(E_8) : $e^{2x-4} + 1 \geqslant 0$

(E_9) : $e^{x^2+x} - 1 \geqslant 0$

50 Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{e^{1+x}}{e^{x+2}}, \quad \frac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}+e^x}, \quad \left(\frac{e}{e^{-x}}\right)^4, \quad \frac{e^{-x+4}}{\left(e^{2-x}\right)^2}, \quad e^{3x-1} \times \left(e^{2x+1}\right)^3.$$

51 Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $2^x = 3^{2x-1}$

(E_2) : $3^{x/2+1} - 2^{x+1} = 0$

52 Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \ln(x) + 2\ln(y) = 1 \\ 3\ln(x) + 5\ln(y) = 4 \end{cases}$$

53 Résoudre les équations d'inconnue x suivantes :

(E_1) : $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9 \times 3^{x-2}$

(E_2) : $3^{4x} = 9^{x+5}$

(E_3) : $2^{2x+2} - 7 \times 2^{x+1} = 8$

(E_4) : $2 \times 4^x - 3 \times 2^x = 20$

(E_5) : $2 \times 5^{-x} - 5^x = 1$

(E_6) : $9 \times 3^{-3x} - 10 \times 3^{-x} + 3^x = 0$

54 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$u_n = \exp\left(x \times \frac{\ln(1+x/n) - \ln(1)}{x/n}\right)$$

2. Rappeler la valeur de la limite suivante (il s'agit de la limite d'un taux d'accroissement...) :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

55 Dans cet exerice, on cherche à déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$(\star) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) f(y).$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe.
   (a) Démontrer que $f(0) \in \{0; 1\}$.
   (b) Démontrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle. On supposera donc pour la suite que $f(0) = 1$.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

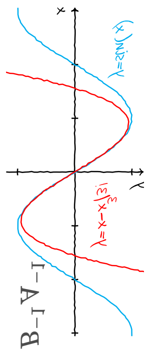
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(n) = f(1)^n.$$

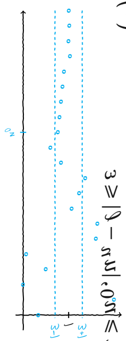
   (d) Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)^{\frac{1}{n}}$$

   (e) En déduire que :

$$\forall r \in \mathbb{Q}^\star, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(r) = f(1)^r$$





(f) On admet que si deux fonctions continues coïncident sur $\mathbb{Q}$ alors elles sont égales. Déterminer alors les solutions éventuelles du problème.

2. Conclure.

56 Résoudre $e^{2x} + e^{4x} \geqslant 4$.

57 Résoudre les deux équations ci-dessous :

$$(E_1) \ : \ \ln(x^2 - 3x + 2) = \ln(2)$$
$$(E_2) \ : \ \ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln(2)$$

Que remarque-t-on ?

58 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\ln(2x+4) \geqslant \ln(6-2x)$.

59 Factoriser au maximum :

$A_1 = (-2x-4)(-6x^2+x-2) + (-4x-8)(-5x^2+4x-4)$

$A_2 = (-x-1)(4x^2-x-6) - (x+1)(-6x^2-5x+1)$

$A_3 = (-x+2)(-5x^2-x+1) - (-2x+4)(+4x+2)$

$A_4 = (3x+1)(4x^2-6x+3) - (-9x-3)(4x^2-6x+2)$

$A_5 = (-3x-2)(2x^2-6x-4) - (-6x-4)(-6x^2-2x-5)$

$A_6 = (1+x)^2 - (2-3x)^2$

$A_7 = (11+7x)^3 - (7+x)^3$

$A_8 = 3 - 2x^7$

$A_9 = (2-3x)^3 + (x-2)^3$

60 Développer :

$A_1 = (1+2x)^3$ $\qquad$ $A_3 = (x-2y)^4$

$A_2 = (2-3x)^3$ $\qquad$ $A_4 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

61 Résoudre les (in)équations de $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$(E_1) \ : \ |2+x| - |2-3x| = 2$ $\qquad$ $(E_4) \ : \ |1-x| + |1+2x| \geqslant 2$

$(E_2) \ : \ |1+2x| + |2+x| \leqslant 4$ $\qquad$ $(E_5) \ : \ |2x-1| \leqslant |x+2|$

$(E_3) \ : \ |1-x| + |1+x| = 1$ $\qquad$ $(E_6) \ : \ |3x-4| + |5-x| = 10$

62 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 |x-1| \, dx \quad \text{et } J = \int_0^3 |2x-1| \, dx$$

63 Soient $x \in [1,2]$ et $y \in [-1,4]$. Donner le meilleur encadrement possible de :

$$\frac{x}{y}, \quad x+y, \quad xy, \quad \sqrt{x+y}, \quad x^2+y^2 \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{e^y}.$$

64 Résoudre les équations de $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$(E_1) \ : \ x^3 - 2x^2 + x = 0$

$(E_2) \ : \ x^3 + (\sqrt{2}-2)x^2 + (1-2\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

$(E_3) \ : \ (x^2+x-2)(2x+3) - (2x^2+7x+6)x = 0$

$(E_4) \ : \ 4x^2 + 12x + 9 = 0$

65 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(E_1) \ : \ \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{1-x}{3} \geqslant 1$ $\qquad$ $(E_3) \ : \ \dfrac{(2x+1)^2 - 9}{x^2+x} < 0$

$(E_2) \ : \ \dfrac{3x+2}{1+x} < \dfrac{x+1}{1-x}$ $\qquad$ $(E_4) \ : \ \dfrac{x^2-4}{x+2} < 0$

66 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^1 |x^2 + x| \, dx.$$

67 Soit $x \in [1,5]$. Donner le meilleur encadrement possible de

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8.$$

68 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $x \geqslant \dfrac{1}{x}$.

69 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} = 0.$$

70 Soit $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Encadrer au mieux $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$.

71 Factoriser au maximum :

$A_1 = (x^2-2x+1)(2x+6)-(x^2+6x+9)(2x-2)$

$A_2 = (x^3+3x^2+3x+1)(2x+3)+(4x+6)(x^2+2x+1)$

72 Résoudre : $|\sin(x)-1/4| \leqslant 1/4$.

73 Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x=0 \text{ et } y>0\}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy). \end{array}$$

Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) \in A$.

74 Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+x}. \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation (E) : $y = f(x)$ d'inconnue x admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
2. On appelle g la fonction qui à y associe l'unique solution précédente. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

75 Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|}. \end{array}$$

1. Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $y = f(x)$ admet-elle une solution ?
2. Déterminer alors cette (ces) solution(s).
3. Résoudre $|f(x)| \leqslant 1/2$.

76 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1; \quad u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n. \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad \text{et} \quad b_n = 2^n u_n.$$

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

77 On pose :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier n.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n.
   (b) En déduire le terme général de u_n en fonction de n pour tout n.

78 Soit (u_n) une suite géométrique telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

79 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + \pi. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \pi/3$ est géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

80 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{4}\left(2 - 4n + 3^n\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{4}\left(-2 + 4n + 3^n\right)$$

1. Calculer u_0, u_1, v_0 et v_1.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_n$ de terme général $a_n = u_n + v_n$ est géométrique.
3. Démontrer que la suite $(b_n)_n$ de terme général $b_n = u_n - v_n$ est arithmétique.
4. En déduire l'expression de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$.
5. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme des N premiers termes de $(u_n)_n$.

81 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}. \end{cases}$$

1. Démontrer que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

   (a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire la limite de $(u_n)_n$.

3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

82 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

83 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

84

1. Soient a et b deux constantes réelles. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n.$$

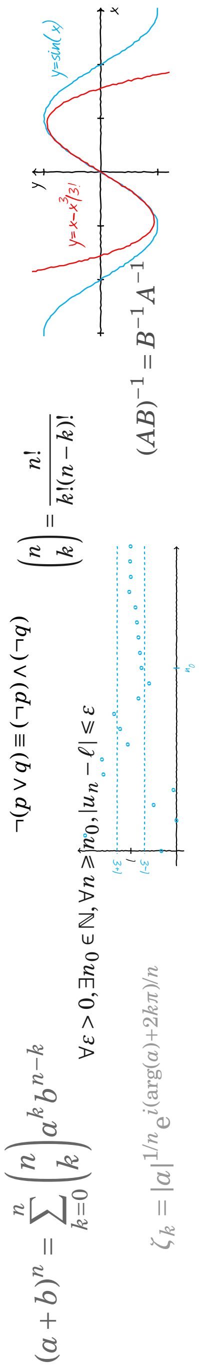
   On suppose que l'équation d'inconnue x, $x^2 = ax + b$ admet au moins une solution c. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - c\,u_n$ est géométrique de raison $a - c$.

2. On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0\,; \quad F_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$.
   On notera Φ la solution positive et φ la solution négative.

   (b) En utilisant la première question, exprimer F_n en fonction de n, de Φ et de φ.



(c) Déterminer la limite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

85 Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique telle que $u_7 = 12$ et $u_{12} = 7$. Déterminer u_{127}.

86 Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique telle que $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 20$ et $u_2 = 2$. Déterminer son premier terme et sa raison.

87 Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique telle que $u_3 = 3$ et $u_8 = 8$. Donner l'expression générale de la suite.

88 Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Déterminer l'entier N tel que :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_N = 196605.$$

89 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$,
2. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-5}$,
3. $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$,
4. $u_n = 5n + 7 - n^2$,
5. $u_n = n - \ln n$,
6. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$,
7. $u_n = n + 5\cos n$,
8. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$,
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
10. $u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$,
11. $u_n = \dfrac{n!}{5^n}$,
12. $u_n = n^2 - 2^n$.

90 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}. \end{cases}$$

1. Démontrer que cette suite est bien définie.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

91 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer ce résultat.
4. Quelle est la limite éventuelle de $u_{n+1} - u_n$ lorsque $n \to +\infty$?

92 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

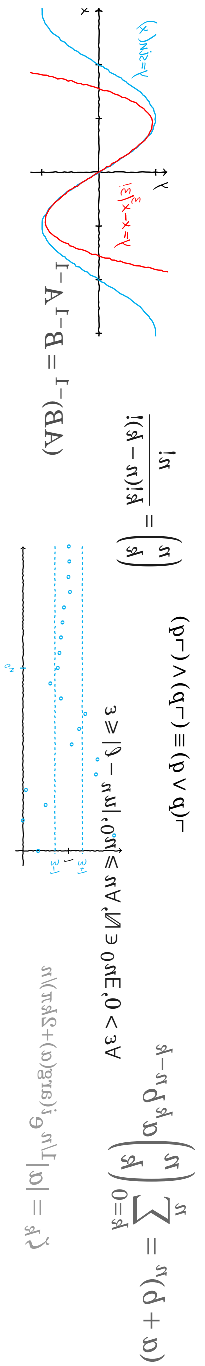
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n^2} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de cette suite.
2. Démontrer que cette suite est bornée.
3. La suite converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

93 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est bornée.
   (b) Démontrer qu'elle est monotone.
   (c) En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.



2. (a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

(b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

94 Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right)$$

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

95 Soit $(u_n)_n$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1) \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1) \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

96 On considère la suite définie par son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser la valeur de sa limite.

97 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1. Étudier la suite de terme général $a_n = u_n - v_n$.
2. Étudier la suite de terme général $b_n = u_n + v_n$.
3. En déduire les expressions de u_n et v_n pour tout n.
4. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent-elles des limites ?

98 À l'aide de la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ fois}}.$$

99 *Python - série harmonique.* Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

On se propose de démontrer qu'elle converge et de donner une valeur approchée de sa limite.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction ci-dessous :

$$f : \begin{array}{rcl} 1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \end{array}$$

2. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que pour tout $x \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

(b) En intégrant entre k et $k+1$ l'inégalité obtenue à la question précédente, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

   (c) ⋆ En déduire que la suite est minorée par 0

4. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite γ puis écrire un programme donnant une approximation de γ à ε près où ε sera un paramètre d'entrée.
   Indication : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, |u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{2n}$.

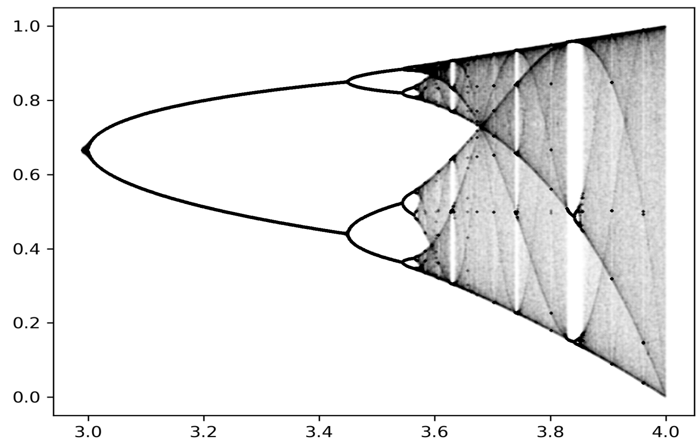
100 *Python - suite logistique.* Soient $r \in [1,4]$ et $u_0 \in]0,1[$. La *suite logistique* $(u_n)_n$ de paramètre r et de premier terme u_0 est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r u_n (1 - u_n)$$

On a déjà étudié cette suite dans le cas particulier où $r = 1$ et $u_0 = 0,5$ dans l'exercice 82. Nous allons ici tracer son évolution en fonction du paramètre r.

1. Écrire un programme Python prenant en argument u_0, r et N et traçant les N permiers termes de la suite logistique correspondante.
2. Tracer l'évolution de la suite logistique avec les paramètres suivants :
   - $u_0 = 0,5$ et $r = 1$
   - $u_0 = 0,3$ et $r = 1$
   - $u_0 = 0,1$ et $r = 3,1$
   - $u_0 = 0,1$ et $r = 3,5$
   - $u_0 = 0,1$ et $r = 3,57$
3. Lorsqu'une suite oscille entre plusieurs valeurs, ces valeurs sont appelées *valeurs d'adhérence* (on pourra définir de manière plus rigoureuse ce concept au prochain semestre à l'aide de la notion de *suite extraite*). Dans la suite, on se propose d'illustrer l'évolution des valeurs d'adhérence de la suite en fonction de r.
   (a) Écrire un programme Python prenant en argument u_0, r, N et nb et rendant la liste $[u_N, u_{N+1}, \dots, u_{N+nb}]$.
   (b) En faisant varier r entre 1 et 4 avec un pas de votre choix, tracer en ordonnée la liste précédente en fonction de r. On pourra prendre par exemple un pas de 0,01, $u_0 = 0,5$, $N = 200$ et $nb = 200$.

Le diagramme obtenu est appelé *diagramme de Feigenbaum*. Ci-après une vue rapprochée sur l'intervalle $[3,4]$: plus le diagramme est foncé, plus souvent la suite passe par la valeur en question.



Pour aller plus loin sur le sujet, on pourra consulter la chaîne **Science étonnante** sur Youtube et son numéro sur l'effet papillon : `https://www.youtube.com/watch?v=YrOyRCD7M14`

101 Soit $t \in \mathbb{R}$.

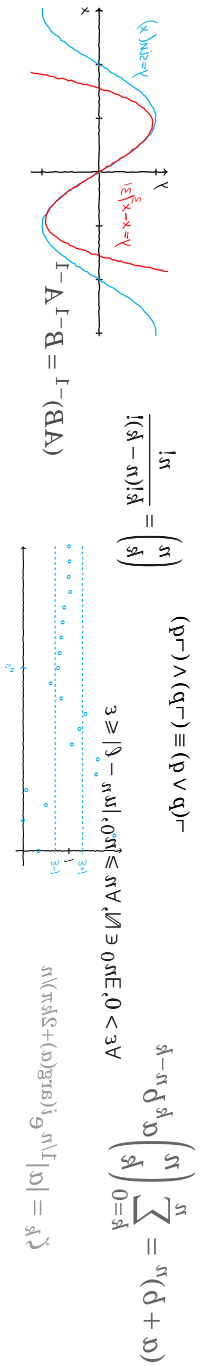
1. Exprimer $\sin^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

102 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Simplifier $\cos(a-b) + \cos(a+b)$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t.$$



103 Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

1. Simplifier :
$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
2. Résoudre alors l'équation $(E)\ :\ \cos(t)+\cos(2t)=0$.

104 En remarquant que $\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

105 En exprimant $\frac{\pi}{12}$ à l'aide de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

106 Déterminer $\cos(x)$ sachant que $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin(x)=\frac{2}{3}$.

107 Déterminer $\sin(x)$ sachant que $x \in [-\pi,0]$ et que $\cos(x)=\frac{3}{5}$.

108 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(i) $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=2$

(ii) $(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2=4\cos(x)\sin(x)$.

109 Résoudre les inéquations ci-dessous sur l'intervalle indiqué.

(E_1) $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[0,\pi]$

(E_2) $|\sin(x)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0,2\pi[$

(E_3) $2\cos^2(x)-3\cos(x)-2 \leqslant 0$ sur $[0,2\pi[$

(E_4) $2\sin^2(x)+4\sin(x) \leqslant -2$ sur $]-\pi,\pi]$.

110 Résoudre les équations de $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

(E_1) $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(E_2) $2\sin(x)+1=0$

(E_3) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

(E_4) $1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

(E_5) $\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(E_6) $2\sin^2(x)+\sin(x)-1=0$

(E_7) $\sqrt{3}\cos^2(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=0$

(E_8) $\cos(4x+\pi)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

(E_9) $\sin(\pi-2x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

111 On considère la fonction :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{5+\cos(2x)}\end{array}$$

1. Démontrer que f est π-périodique.
2. Déterminer la parité éventuelle de f.
3. En déduire un intervalle d'étude (le plus petit possible) pour f.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2\pi,3\pi]$.

112 On considère la fonction :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\end{array}$$

1. Démontrer que f est 2π-périodique.
2. Déterminer la parité éventuelle de f.
3. En déduire un intervalle d'étude (le plus petit possible) pour f.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2\pi,3\pi]$.

113 On considère la fonction :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)(1+\cos(x))\end{array}$$

1. Démontrer que f est 2π-périodique.
2. Déterminer la parité éventuelle de f.
3. En déduire un intervalle d'étude (le plus petit possible) pour f.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-\pi,2\pi]$.

114 Démontrer les formules ci-dessous (où x est un réel quelconque) :

(i) $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$

(ii) $\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$

115 Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ puis résoudre :

$$(E)\ :\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos(2x).$$

116 Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ puis résoudre :

$$\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1$$

117 Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(\sin(x))=\frac{1}{2}.$$

On pourra donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s) à l'aide de la calculatrice.

118 On considère l'équation de $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ suivante :

$$(E)\ :\ \cos(2x)+\sin(x)-\sin(3x)-1=0$$

1. Exprimer le membre de gauche de (E) uniquement à l'aide de $\sin(x)$.
2. Résoudre alors (E).

119 Résoudre les équations ci-dessous ($x \in \mathbb{R}$) :

$$(E_1)\ :\ \tan(x)=1 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ \tan(x)=\sqrt{3}$$

.

120 Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$|\tan(2x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

121 Démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, lorsque les quantités ci-dessous sont bien définies :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

122 Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que, lorsque les quantités ci-dessous sont bien définies :

$$\tan^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

123 Démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, lorsque les quantités ci-dessous sont bien définies :

$$\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

124 Calculer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{-17\pi}{4}\right)$.

125 Déterminer le signe sur $[0,2\pi]$ de :

$$-4\cos^2(x)+\left(2\sqrt{3}-2\right)\cos(x)+\sqrt{3}.$$

126 Déterminer la mesure principale de l'angle dont une mesure est $\frac{-120\pi}{7}$.

127 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z où z vérifie l'équation donnée :

a) $\mathrm{Re}(z+1)=0$

b) $|z|=2$

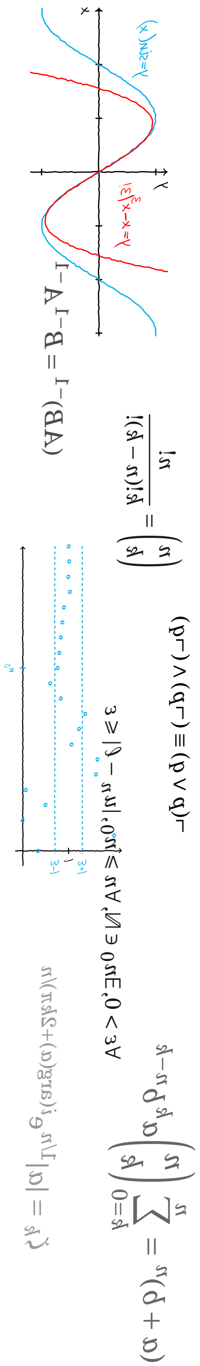
c) $|z+1|=|z|$

128 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$A=(2+i)(1-i)^2 \qquad C=\frac{3+2i}{1+i}-\frac{1-2i}{1-i}$$

$$B=\frac{1+2i}{1-i} \qquad D=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$$

129 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :



$(E_1)\ :\ \dfrac{z+1}{z-2}=i$ $\qquad$ $(E_3)\ :\ z+2-2i=iz-3$

$(E_2)\ :\ (z-1+2i)(z+i)=0$ $\qquad$ $(E_4)\ :\ (1-2i)z-2+3i=0$

130 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(z,z')\in\mathbb{C}^2$:

$(S_1)\ :\ \begin{cases} z-z'=1+i \\ 2z+z'=0 \end{cases}$ $\qquad$ $(S_3)\ :\ \begin{cases} z-z'=2-i \\ -z+z'=-2+i \end{cases}$

$(S_2)\ :\ \begin{cases} z+z'=1+i \\ 2z+2z'=1 \end{cases}$ $\qquad$ $(S_4)\ :\ \begin{cases} 3z+z'=2-2i \\ 2z+z'=i \end{cases}$

131 Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ z-2\overline{z}+2=0.$$

132 Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ 2\overline{z}-2+6i=z.$$

133 Soient z et z' deux nombres complexes. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

A_1 : Si $z-\overline{z}=0$ alors $z=0$.

A_2 : Si $|z|=1$ et que $|z+z'|=1$ alors $z'=0$.

A_3 : Si $\mathrm{Im}(z+z')=0$ alors z et z' sont conjugués.

A_4 : Si z est sur le cercle trigonométrique alors $1/z$ l'est aussi.

134 Résoudre les équations d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivantes :

$(E_1)\ :\ z^2-2z+2=0$ $\qquad$ $(E_3)\ :\ z^4+3z^2+2=0$

$(E_2)\ :\ z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ $\qquad$ $(E_4)\ :\ z^4-1=0$

135 On considère le polynôme de la variable complexe z suivant :

$$P(z)=z^3+(-3+i\sqrt{3})z^2+(4-2\sqrt{3})z-2+2i\sqrt{3}$$

1. Démontrer que $P(z)=(z-1+i\sqrt{3})(z^2-2z+2)$.
2. En déduire la forme exponentielle des racines de P.

136 On considère l'équation ci-dessous :

$$(E)\ :\ z^3-1=0$$

1. Déterminer les solutions de (E).
2. On note j la solution complexe de E dont la partie imaginaire est strictement positive.
   (a) Calculer j^2, j^3, j^4 puis j^{1515}.
   (b) Calculer $1+j+j^2+j^3+\ldots+j^{404}$.

137 On pose :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad z_2=1-i$$

1. Donner la forme exponentielle de z_1z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

138 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i},\quad z_2=\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{2-2i},\quad\text{et}\quad z_3=(1-i)^6+1$$

139 On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c où :

$$a=1+\frac{3i}{4},\quad b=2-\frac{5i}{4}\quad\text{et}\quad c=3+\frac{7i}{4}.$$

Déterminer la nature du triangle (ABC).

140 On considère l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ z^2-2\sqrt{3}z+4=0$$

1. Résoudre (E).
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on considère le point M_n d'affixe $z_n=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$.
   (a) Démontrer que z_1 est solution de (E).

(b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

(c) Tracer dans un repère orthonormé les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

3. Donner la forme algébrique de z_n pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.
5. On admet que pour tout $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

   (a) Déterminer $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \ldots + M_nM_{n+1}$.

   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1000$.

141 On considère la suite complexe $(z_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n \end{cases}$$

1. Calculer sous forme exponentielle z_0, z_1, z_2 et z_3.
2. Conjecturer alors la forme exponentielle de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture.

142 À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il réel ?

143 Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On pose $z = e^{i\theta} + 1$.

1. Écrire z sous forme exponentielle : on pourra factoriser par $e^{i\theta/2}$.
2. Intepréter géométriquement le résultat (faire un dessin).

144 On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ ci-dessous :

$$(E)\ :\ z^2 + (-2-1i)z + 2 - 2i$$

1. Écrire sous forme algébrique le nombre $(2+3i)^2$.
2. En déduire les solutions de (E).

145 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2. Réinjecter les formules précédentes dans l'expression ci-dessous :

$$\cos(\theta)\sin(\theta)$$

3. Retrouver alors une formule de trigonométrie.

146 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = 1.$$

On donnera une résolution algébrique et une résolution géométrique du problème.

147 On considère l'application :

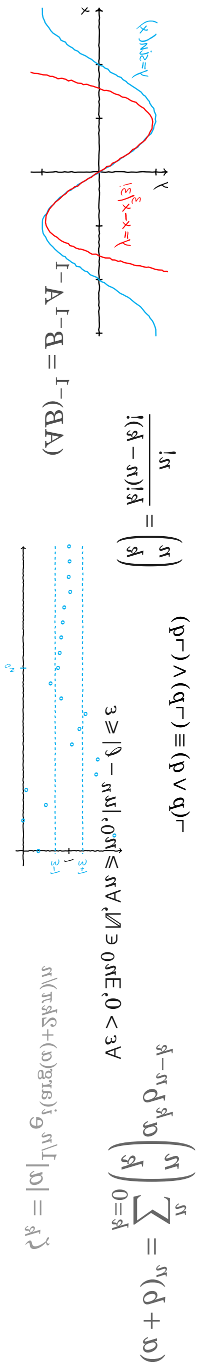
$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{C}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \dfrac{1-z}{1+z} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout z de module 1, $g(z) + \overline{g(z)} = 0$.
2. En déduire que l'image par g du cercle trigonométrique est incluse dans l'ensemble des nombres imaginaires purs.
3. Retrouver directement le résultat en calculant $g(e^{i\theta})$ comme dans l'exercice 143.

148 Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ (domaine de définition, dérivabilité, tableau de variations avec les limites aux bornes du domaine de définition et allure du graphe).

149 Dériver l'expression de x suivante (on ne demande pas de déterminer le domaine de définition ni de dérivabilité) :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\sin(2x)}{x^2+1}}$$



150 Déterminer le domaine de définition, de dérivabilité, puis dériver la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{\cos(x)+2}{1-x^2}\right)$$

151 Soit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 4\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les points d'intersection éventuels de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé avec les axes de ce repère.

152 Soit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 2+x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

153 Soit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-3x} \end{array}$$

Démontrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur exacte de ce maximum.

154 Soit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1+2\ln(x)}{x^2} \end{array}$$

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

155 Soit :

$$\begin{array}{cccc} f & : &]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(\sin(x)) \end{array}$$

Dresser le tableau de variations de f puis résoudre l'équation $f(x)=0$.

156 On admet qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On rappelle que cette fonction peut être définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Démontrer que $g : x \mapsto f(x)+f(-x)$ est dérivable puis calculer sa dérivée.
   (b) Calculer $g(0)$ puis en déduire la parité de f.
2. (a) Démontrer que $h : x \mapsto f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable puis calculer sa dérivée.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha$$
   (c) Déterminer la limite éventuelle de f en $+\infty$.

157 Étudier la fonction (domaine de définition, tableau de variations, limites aux bornes du domaine) :

$$f : x \mapsto x^x$$